أولاً

الجبر

الوحدة الأولى : المصفوفات

درس ١ مفهوم المصفوفة ومدور وتساوى المصفوفة

• **تعريف المصفوفة** : هى صورة لتنظيم المعلومات على هيئة صفوف وأعمدة توضع بين قوسين ( )

• إذا كان عدد الصفوف يساوى (م) وعدد الأعمدة يساوى (ن) قيل إن المصفوفة من النظم (م × ن) فى دراستنا م ≤ ٣ ، ن ≤ ٣

• **بعض المصفوفات الخاصة** :

(١) **مصفوفة الصف** : هى المصفوفة التى تتكون من صف واحد وأى عدد من الأعمدة .

(٢) **مصفوفة العمود** : هى المصفوفة التى تتكون من أى عدد من الصفوف وعمود واحد فقط .

(٣) **المصفوفة المربعة** : هى المصفوفة التى فيها عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة .

(٤) **المصفوفة الصفرية** : هى المصفوفة التى جميع عناصرها أصفار . ويرمز لها بمستطيل ▭

• **مدور المصفوفة** : استبدال الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف بنفس الترتيب لمصفوفة ا على النظم (م × ن) نحصل على مصفوفة من النظم (ن × م) يسمى مدور المصفوفة ا ويرمز لها بالرمز $ا^{ت}$ • **ملحوظة** : $(ا^{ت})^{ت} = ا$

• **المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة** : إذا كانت ا مصفوفة مربعة فإنها تسمى متماثلة وإذا وفقط إذا كانت $ا = ا^{ت}$ ، وتسمى شبه متماثلة إذا وفقط إذا كانت $ا = -ا^{ت}$

• **تساوى مصفوفتين** : يقال لمصفوفتين أنهما متساويان إذا وفقط إذا كانت لهما نفس النظم (الأبعاد) والعناصر المتناظرة متساوية .

• فمثلاً : $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & \overline{٢}/ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ \overline{٢}/ & ٥ \end{pmatrix}$

• **مثال (١)** : أوجد قيمة كل من المتغيرين س ، ص إذا كان :

$$\begin{pmatrix} ٨ & ٣ \\ ٢ص+٣ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & س+٥ \\ ٥- & ٥ \end{pmatrix}$$

الحـل

∵ المصفوفتان متساويتان ∴ العناصر المتناظرة فى الأوضاع متساوية

∴ س + ٥ = ٣ ∴ س = −٢

∴ ٢ص + ٣ = −٥ ∴ ٢ص = −٨ ∴ ص = −٤

• مثال (٢) : أوجد مدور المصفوفة التالية : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ∴ $أ^{ت} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$

• ملحوظة : أ مصفوفة صف على نظم ١ × ٣ ، $أ^{ت}$ مصفوفة عمود على نظم ٣ × ١

$ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ٨ \end{pmatrix}$ ∴ $ب^{ت} = \begin{pmatrix} ٣ & ٦ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$

$ج = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{pmatrix}$ ∴ $ج^{ت} = \begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٧ \\ ٢ & ٥ & ٨ \\ ٣ & ٦ & ٩ \end{pmatrix}$

• ملحوظة : مدور المصفوفة الصفرية هى مصفوفة صفرية .

$ء = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square$ ، $ء^{ت} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square$

تمرين (١) : على مفهوم المصفوفة ومدور وتساوى المصفوفة

• أوجد قيمة المجهول فيما يلى :

(١) $\begin{pmatrix} س & ع-١ \\ ص+١ & هـ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٨ & ٤ \end{pmatrix}$

(٢) $\begin{pmatrix} ٢س+١ & ٢ص \\ ٤ل+١ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$

(٣) $\begin{pmatrix} \frac{أ}{٢} & \frac{ع}{٣} \\ أ+ب & ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٣ \\ ٨ & ٦ \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} أ+ب & س \\ ص & أ-ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٤ & ٤ \\ ٢ & ٨ \end{pmatrix}$

(٥) $\begin{pmatrix} أ & ب \\ س-ص & س-ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٦ & ٤ \end{pmatrix}$

(٦) $\begin{pmatrix} أ+٢ب & س \\ س+ص & أ-ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$

(٧) $\begin{pmatrix} ج & ء \\ ٢ب & أ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٢أ \\ ج & ب \end{pmatrix}$

(٨) $\begin{pmatrix} أ+ب & ب \\ ٣ج & ب-أ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ب \\ ٦ & ٢أ+ء \end{pmatrix}$

(٩) $\begin{pmatrix} ٢أ+١ & ٣ب+أ \\ ٢ب+ج & ٢ج+ء \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & -١٤ \\ ٠ & ١٨ \end{pmatrix}$

(١٠) $\begin{pmatrix} ٥ & أ+٢ب \\ ٢ج & ء+٥ج \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤٥ & ٤٩ \\ ٦ & ٢٠ \end{pmatrix}$

• أوجد مدور المصفوفات التالية :

(١١) $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$

(١٢) $ب = \begin{pmatrix} ٨ & ٥ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix}$

(١٣) $ج = \begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ٤ \\ ٥ & ٨ & ١ \end{pmatrix}$

(١٤) $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٥ & ٨ & ٩ \\ ١ & ٢ & ١٠ \end{pmatrix}$

(١٥) $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(١٦) $ب = \begin{pmatrix} ٢س & ٥ & ٦ \\ ٥ & ١ & ٩ \\ ٦ & ٩ & ٤ \end{pmatrix}$

(١٧) $س = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ & ١ \\ -٥ & ٦ & -٩ \\ -١ & ٩ & ٧ \end{pmatrix}$

(١٨) $أ^{-١} = \begin{pmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ أوجد أ

(١٩) $س^{ت} = \begin{pmatrix} ٦ & ٥ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ ٩ & ٠ & ٨ \end{pmatrix}$ أوجد س

(٢٠) $ص^{ت} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٦ \end{pmatrix}$ أوجد ص

(٢١) $أ^{-١} = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ٤ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ أوجد أ

(٢٢) $أ^{-١} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٠ \\ ٤ & ٦ & ١ \end{pmatrix}$ أوجد أ

(٢٣) $س^{ت} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٥ & ٦ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ أوجد س

(٢٤) $س^{ت} = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٤ \\ -١ & ٢ & ٦ \\ ٤ & ٦ & ٥ \end{pmatrix}$ هل هى متماثلة أو شبه متماثلة ؟

• إمكانية جمع مصفوفتين أ، ب : الجمع ممكن إذا كان لهما نفس النظم.

• مثال (١) : إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٨ & ٣ \\ ٦- & ١- \end{pmatrix}$ أوجد أ + ب ، ب + أ

الحـل

أ + ب = $\begin{pmatrix} ٨+٤ & ٣+٣ \\ ٦-٦ & ١-٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ٦ \\ \text{صفر} & ٤ \end{pmatrix}$

• ملحوظة : نفس النظم ٢ × ٢ ∴ عملية الجمع مغلقة

ب + أ = $\begin{pmatrix} ٤+٨ & ٣+٣ \\ ٦+٦- & ٥+١- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ٦ \\ \text{صفر} & ٤ \end{pmatrix}$

∵ أ + ب = ب + أ ∴ عملية الجمع إبدالية

• مثال (٢) : إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤- & ٢- \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٥- & ٦ \end{pmatrix}$

أوجد : (١) أ + ب + جـ (٢) (أ + ب) + جـ (٣) أ + (ب + جـ)

الحـل

(١) أ + ب + جـ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤- & ٢- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٥- & ٦ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٧+٢+٣ & ١+٦+٢ \\ ٥-٤-٤ & ٦+٢-٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ٩ \\ ٥- & ٩ \end{pmatrix}$

(٢) (أ + ب) + جـ = $\left[\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤- & ٢- \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٥- & ٦ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٥ & ٨ \\ \text{صفر} & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٥- & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ٩ \\ ٥- & ٩ \end{pmatrix}$

(٣) أ + (ب + جـ) = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤- & ٢- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٥- & ٦ \end{pmatrix}\right]$

= $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & ٢ \\ ٩- & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ٩ \\ ٥- & ٩ \end{pmatrix}$

∴ أ + ب + جـ = (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) ∴ عملية الجمع دامجة

• عملية ضرب عدد حقيقي في مصفوفة :

ناتج ضرب مصفوفة أ على نظم م × ن في عدد حقيقي ك هو مصفوفة يضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة أ في العدد الحقيقي ك

إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ٨ \end{pmatrix}$ فإن ٢أ = $\begin{pmatrix} ٦ & ١٠ \\ ١٢ & ١٦ \end{pmatrix}$ -أ = $\begin{pmatrix} ٣- & ٥- \\ ٦- & ٨- \end{pmatrix}$

أ + ☐ = ☐ + أ = أ يسمى ☐ المحايد الجمعي

حيث ☐ هي المصفوفة الصفرية

خاصية : أ + (-أ) = -أ + أ = ☐

حيث يسمى (-أ) النظير الجمعي للمصفوفة أ

• طرح المصفوفات :

إذا كانت كل من المصفوفتين على النظم م × ن فإن المصفوفة ح = أ - ب = أ + (-ب) حيث -ب هو المعكوس الجمعي للمصفوفة ب

• مثال (٣) : إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٨ & ٦ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ٩ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥ & ١٢ \end{pmatrix}$

أوجد : ٢أ - ٣ب - ٤جـ

الحـل

٢أ = ٢ $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٨ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٤ \\ ١٦ & ١٢ \end{pmatrix}$ ، -٣ب = -٣ $\begin{pmatrix} ٤ & ٩ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢- & ٢٧- \\ ٩- & ٣- \end{pmatrix}$

-٤جـ = -٤ $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥ & ١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨- & ١٦- \\ ٢٠- & ٤٨- \end{pmatrix}$

٢أ - ٣ب - ٤جـ = ٢أ + (-٣ب) + (-٤جـ)

= $\begin{pmatrix} ١٠ & ٤ \\ ١٦ & ١٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٢- & ٢٧- \\ ٩- & ٣- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٨- & ١٦- \\ ٢٠- & ٤٨- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠- & ٣٩- \\ ١٣- & ٣٩- \end{pmatrix}$

• مثال (٤) : إذا كانت : ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

، ء = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة س حيث ٢ب − ٣جـ = ٤س − ٣ء

الحـل

∵ ٢ب − ٣جـ = ٤س − ٣ء ∴ ٢ب − ٣جـ + ٣ء = ٤س

∴ س = $\frac{١}{٤}$[٢ب − ٣جـ + ٣ء]

∴ س = $\frac{١}{٤}$ $\left[\begin{pmatrix} ٦ & ١٠ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & -٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}\right]$

س = $\frac{١}{٤}$ $\begin{pmatrix} ٦ & ١٠ & ٤ \\ ٢ & -٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & \frac{٥}{٢} & ١ \\ \frac{٣}{٤} & \frac{-٣}{٤} & \frac{٥}{٤} \\ \frac{١}{٢} & \frac{٣}{٤} & \frac{-١}{٤} \end{pmatrix}$

• مثال (٥) : إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٦ & ٨ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س إذا كان ٥ب − س$^{-١}$ = ٣أ

الحـل

٥ب − س$^{-١}$ = ٢أ ∴ س$^{-١}$ = ٥ب − ٣أ = ٥ب + (−٣)أ

∴ س$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} ٢٥ & ١٠ \\ ٤٠ & ٣٠ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} -١٥ & -٩ \\ -١٨ & -٦ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١٠ & ١ \\ ٢٢ & ٢٤ \end{pmatrix}$

∴ س = (س$^{-١}$)$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} ١٠ & ١ \\ ٢٢ & ٢٤ \end{pmatrix}^{-١}$ = $\begin{pmatrix} ٢٤ & ١ \\ ٢٢ & ١٠ \end{pmatrix}$

تمرين (٢) : على جمع وطرح المصفوفات

❶ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & -٢ \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} ٦ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

أوجد : أولاً : أ + ٣ب ثانيًا : ٢أ − ٥ب

ثالثًا : ب + ٢جـ − أ - رابعًا : أ − ٢ب − ٣جـ

---

❷ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٧ \\ ٢ & ٥ & ٨ \\ ٣ & ٦ & ٩ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & -١ \\ ٦ & ٣ & -٢ \\ ١ & ٤ & ٧ \end{pmatrix}$

أوجد قيمة المصفوفة س التى تحقق المعادلة :

أولاً : ٣س − ٣ب = ٢أ ثانيًا : ٣س$^{-١}$ = أ − ٢ب

ثالثًا : س + ٢أ$^{-١}$ = ٢ب$^{-١}$

---

❸ أوجد قيمة المجهول إذا كان :

[أ] $\begin{pmatrix} س & ٢ \\ ص & ٣ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ١٠ \end{pmatrix}$

[ب] $\begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$

[جـ] $\begin{pmatrix} ٤ & ٢س \\ ٣ & ص \end{pmatrix}$ − $\begin{pmatrix} -٢ & س \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٦ & ٩ \\ ٣ & ٨ \end{pmatrix}$

[ء] $\begin{pmatrix} س & ٢ & ١ \\ ٠ & ص & ٣ \\ ٤ & ٥ & ع \end{pmatrix}$ − $\begin{pmatrix} ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \\ -٢ & -٣ & -١ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ & -٣ & -٥ \\ -٧ & ١ & -٦ \\ ٦ & ٨ & ٤ \end{pmatrix}$

٤ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٥ \end{pmatrix}$

أوجد فى كل حالة مما يلى المصفوفة س بحيث :

أولاً : أ + س = ب + ج

ثانيًا : ٣أ + ٢س = ٢ب − ج

ثالثًا : ٢(ب − س) = ٢(س − ج) − ب

رابعًا : $\frac{١}{٢}$(أ + س) = ٣س + ٢ب

خامسًا : ٢أ + س^{ت} = ٢ب − ٥ج

سادسًا : ٣(س + أ) = ٢س + ب

سابعًا : ٢س + س^{ت} = أ + ٢ب − ٣ج

ثامنًا : س^{ت} + ٢أ^{ت} = (٢ب + ج)^{ت}

٥ أوجد مصفوفتين س ، ص بحيث يكون :

س + ص = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ ، س − ص = $\begin{pmatrix} ٨ & ٤ \\ ٦ & ١٠ \end{pmatrix}$

٦ أوجد المصفوفتين س ، ص بحيث يكون :

٣س + ٢ص = $\begin{pmatrix} ١ & ١٢ \\ ١١ & ٥- \\ ٥ & ١٢- \end{pmatrix}$ ، ٢س − ٣ص = $\begin{pmatrix} ٥ & ٥- \\ ٣ & ١٤ \\ ١٤- & ٥ \end{pmatrix}$

٧ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ & ١ \\ ١ & ٦ & ١٤- \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٣- & ٥ \end{pmatrix}$

وكان س + ٢ص = ٤أ + ٢ب ، س − ص = ٣أ − ٢ب

أوجد كلاً من المصفوفتين س ، ص

درس ٣ ضرب المصفوفات

• **إمكانية ضرب مصفوفتين :**

لضرب مصفوفة أ فى مصفوفة ب يجب أن يكون عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب

فمثلاً :

$\boxed{أ_{م \times ن} \times ب_{ن \times ك} = جـ_{م \times ك}}$

إذا كانت المصفوفة أ على نظم م × ن والمصفوفة ب على نظم ن × ك

فإن عملية الضرب ممكنة وناتج الضرب مصفوفة على نظم م × ك

• **مثال (١) :** $أ_{٣\times٢} \times ب_{٢\times٣}$ فإن ناتج الضرب $جـ_{٣\times٣}$

• **مثال (٢) :** $أ_{٢\times١} \times ب_{١\times٣}$ فإن ناتج الضرب $جـ_{٢\times٣}$

• **مثال (٣) :** $أ_{٢\times٣} \times ب_{٢\times٣}$ إمكانية الضرب غير ممكنة

لأن عدد الأعمدة فى الأولى ≠ عدد الصفوف فى الثانية

إذا كان لدينا مصفوفتين أ ، ب وكان هناك إمكانية الضرب .

سؤال : فما هى الطريقة لإيجاد عناصر حاصل الضرب جـ ؟

• **مثال (٤) :** إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٦- \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٨ & ٧ \end{pmatrix}$ أوجد أ × ب ، ب × أ

الحل

أ × ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٦ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٨ & ٧ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٣\times٢+٥\times٨ & ٣\times١+٥\times٧ \\ ٤\times٢+٦\times٨ & ٤\times١+٦\times٧ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٦+٤٠ & ٣+٣٥ \\ ٨+٤٨ & ٤+٤٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤٦ & ٣٨ \\ ٥٦ & ٤٦ \end{pmatrix}$

ب × أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٨ & ٧ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٦ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٢\times٣+١\times٤ & ٢\times٥+١\times٦ \\ ٨\times٣+٧\times٤ & ٨\times٥+٧\times٦ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٦+٤ & ١٠+٦ \\ ٢٤+٢٨ & ٤٠+٤٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ١٦ \\ ٥٢ & ٨٢ \end{pmatrix}$

• عناصر الصف الأول مع عناصر العمود الأول ثم العمود الثانى وهكذا تعطى عناصر الصف الأول فى الناتج .

• عناصر الصف الثانى مع عناصر العمود الأول ثم الثانى تعطى عناصر الصف الثانى فى الناتج .

• **لاحظ أن :** أ ب ≠ ب أ ∴ عملية الضرب غير إبدالية

• مثال (٥) : إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

أثبت أن : $(أب)^{مد} = ب^{مد} \times أ^{مد}$

الحـل

الطرف الأيمن :

∵ أب = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١+٦ & ١+٤ \\ ١+٩ & ١+٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ ١٠ & ٧ \end{pmatrix}$

∴ $(أب)^{مد} = \begin{pmatrix} ٧ & ١٠ \\ ٥ & ٧ \end{pmatrix}$

الطرف الأيسر :

$ب^{مد} \times أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١+٦ & ١+٩ \\ ١+٤ & ١+٦ \end{pmatrix}$

∴ $ب^{مد} أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٧ & ١٠ \\ ٥ & ٧ \end{pmatrix} = (أب)^{مد}$

• لاحظ أن : $أ^{مد} ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦+٣ & ٣+٢ \\ ٣+١ & ٢+١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ٥ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

• القاعدة : $(أب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$ لاحظ أن : $أ^{مد} ب^{مد} \neq ب^{مد} أ^{مد}$

• مصفوفة الوحدة : هي المصفوفة المربعة التي جميع عناصر قطرها الرئيسي تساوي العدد الحقيقي واحد وباقي عناصرها تساوي العدد الحقيقي صفر ورمزها ا .

• خواص عملية الضرب : إذا كانت أ ، ب ، ج ثلاث مصفوفات فإن :

(١) خاصية الدمج : أب ج = (أب)ج = أ(ب ج)

(٢) خاصية المحايد الضربي : اأ = أا = أ

(٣) خاصية توزيع ضرب المصفوفة على جمعها : أ(ب + ج) = أب + أج

• مثال (٦) : إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

أثبت أن : أ(ب + ج) = أب + أج

الحـل

الطرف الأيمن : ∵ ب + ج = $\begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

∴ أ(ب + ج) = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١+٨ & ١+٨ \\ ١+١٢ & ١+١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & ٩ \\ ١٣ & ١٣ \end{pmatrix}$

الطرف الأيسر : أب + أج = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١+٦ & ١+٤ \\ ١+٩ & ١+٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠+٢ & ٠+٤ \\ ٠+٣ & ٠+٦ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ ١٠ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & ٩ \\ ١٣ & ١٣ \end{pmatrix}$ = الأيمن

تمرين (٣) : على ضرب المصفوفات

❶ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ أوجد أب ، ب أ

❷ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٥ & ٤ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٣ & ٨ \end{pmatrix}$ أوجد أب ، ب أ

❸ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -٢ & -١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ فأوجد :

أولاً : أ(ب + ج) ثانيًا : (أب)ج ثالثًا : $أ^{مد} ب^{مد}$

❹ أوجد قيمة المجهول إذا كان :

[أ] $\begin{pmatrix} س & ٢ \\ ص & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$

[ب] $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٨ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & س \\ ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ ص

[جـ] (١ ٢ ٤ ص ٢ع) = (٢٠-)

٥ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} \text{س} & ٤ \\ \text{ص} & ٨- \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤- & ٢ \end{pmatrix}$ وكان أب = ب أ

أوجد قيمة س ، ص

٦ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٦ & ٤- \\ ٩ & ٦- \end{pmatrix}$ أثبت أن أ^{٢} = ☐

٧ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ فأثبت أن أ^{٢} = ٣أ

٨ إذا كانت أ = $\frac{١}{٥}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ فبين أن أ^{٢} = أ

٩ إذا كانت م = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١- & ٠ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، هـ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ١ \\ ١- & ١- & ٠ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ أوجد قيمة م^{٢} - م هـ

١٠ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٥ & ٦ \\ ١- & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢- & ٥ & ٧- \\ ١٠ & ٥- & ٥ \\ ٨- & ٥ & ٣- \end{pmatrix}$ أثبت أن : أب = ١٠أ

١١ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}$ ، ب = $\frac{١-}{١١}\begin{pmatrix} ٨ & ٥- \\ ٧- & ٣ \end{pmatrix}$ أثبت أن أب = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

١٢ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ١- \\ ٥- & ٣ \end{pmatrix}$

أوجد س إذا كان س^{٢} = أب + أ

١٣ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ & ٦ \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٦ & ٩ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٦ \\ ٢ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٥ & ١ \end{pmatrix}$

أوجد س إذا كان س^{٣} + ٢س = أب + ٢ب

١٤ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١- & ٤ \\ ٦ & ٣- \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س التى تحقق : أولاً : ٢أ - ب^{٣} + ٣س = أ^{٢} + ٥س^{٣}

ثانيًا : أب - ٥س = (ب أ)^{٣} + س^{٣}

١٥ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ٤- & ٢ \end{pmatrix}$ أثبت أن : أ^{٢} - ٤أ = ☐

١٦ إذا كانت $\begin{pmatrix} ٢ & ٣- \\ ١- & ٢ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : أ^{٢} - ٤أ + I = ☐

١٧ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١- & ٤ \end{pmatrix}$ أثبت أن : أ^{٢} - ٧أ + ١٣I = ☐

١٨ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٦- \end{pmatrix}$ أثبت أن : أ^{٢} + ٤أ - ١٧I = ☐

١٩ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : أ^{٢} - أ - ٦I = ☐

تعريف (١) : إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ حيث :

أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix}$ فإن محدد المصفوفة أ يرمز له بالرمز |أ|

يسمى محدد الرتبة الثانية وهو العدد المعرّف كالآتى :

|أ| = $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix}$ = أ د − ب جـ

القطر الرئيسى

مثال (١) : (أ) أوجد قيمة $\begin{vmatrix} ٥ & ٩ \\ ٦ & ٦ \end{vmatrix}$ = ٥ × ٦ − ٦ × ٩ = −٢٤

(ب) أوجد قيمة $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix}$ = ١ × ٧ − ٢ × ٠ = ٧

تعريف (٢) : يسمى محدد المصفوفة على النظم ٣ × ٣ محدد الرتبة الثالثة.

محدد الرتبة الثالثة = $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ د & هـ & و \\ ز & ح & ط \end{vmatrix}$

= أ $\begin{vmatrix} هـ & و \\ ح & ط \end{vmatrix}$ − ب $\begin{vmatrix} د & و \\ ز & ط \end{vmatrix}$ + جـ $\begin{vmatrix} د & هـ \\ ز & ح \end{vmatrix}$

= أ(هـ ط − و ح) − ب(د ط − و ز) + جـ(د ح − هـ ز)

= أ هـ ط − أ و ح − ب د ط + ب و ز − جـ د ح − جـ هـ ز

= ب و ز + جـ د ح − أ و ح − ب د ط − جـ هـ ز

ملحوظة هامة : الناتج الأخير هو ناتج عن فك المحدد بطريقة تسمى الأقطار هكذا .

الأقطار الأخرى

الأقطار الرئيسية

لاحظ أن : الناتج =

حاصل ضرب الأقطار الرئيسى −

حاصل ضرب الأقطار الأخرى

مثال (٢) : أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ٧ \\ ١ & ٤ & ٣ \\ ٦ & ٢ & -١ \end{vmatrix}$

الحل

طريقة الأقطار

الناتج = ٧ × ٤ × ٦ + ٢ × ١ × −١ + ٥ × ٣ × ٢ − ٥ × ٤ × −١ − ٧ × ١ × ٢ − ٢ × ٣ × ٦

= ١٦٦

الطريقة الثانية : الناتج = ٧ $\begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix}$ − ٢ $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & ٦ \end{vmatrix}$ + ٥ $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix}$

= ٧(٢٤ − ٢) − ٢(١٨ + ١) + ٥(٦ + ٤) = ١٦٦

• **ملحوظة هامة :** يمكن فك المحدد من الرتبة الثالثة بدلالة عناصر أى صف (عمود) تحت قاعدة الإشارات المأخوذة للعناصر المضروبة فى المحددات الرتبة الثانية

قاعدة الإشارات هى $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

• **ملحوظة :** القطر الرئيسى والقطر الآخر موجبة والباقى سالب .

مثال (٣) : أوجد قيمة المحدد = $\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٨ \\ ٥ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$

الحل

خذ مثلاً عناصر العمود الثانى مع وضع الإشارات وهى − ، + ، − على الترتيب

∴ قيمة المحدد = − $\begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix}$ + ٢ $\begin{vmatrix} ٣ & ٨ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix}$ − ٤ $\begin{vmatrix} ٣ & ٨ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix}$

= −(١٠ − ٦) + ٢(٦ − ٤٨) − ٤(٣ − ٤٠)

= −٤ − ٨٤ + ١٤٨ = ٦٠

مثال (٤) : الأشكال التالية محدد المصفوفة المثلثية

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٤ & ٥ & ٠ \\ ٥ & ٦ & ٧ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٨ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} أ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ب & ٠ \\ ٠ & ٠ & ج \end{vmatrix}$$

تعريف : قيمة المحدد للمصفوفة المثلثية : يساوى حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسي.

مثال (٥) : ما قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٤ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٨ & ٦ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$

الحـــل

محدد هو محدد مصفوفة مثلثية ∴ قيمة المحدد = ٤ × ٨ × ٢ = ٦٤

تطبيق (١) :

استخدم المحدد لإيجاد مساحة سطح المثلث بمعلومية إحداثيات رؤوس المثلث.

إذا كان لدينا مثلث س ص ع إحداثيات رؤوسه هى (أ ، ب) ، (جـ ، ء) ، (هـ ، و)

فإن المساحة : $\text{مـ} = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} أ & ب & ١ \\ جـ & ء & ١ \\ هـ & و & ١ \end{vmatrix}$

مثال (٦) : أوجد مستخدمًا المحددات مساحة سطح المثلث الذى إحداثيات رؤوسه هى : (٢ ، ١) ، (٣ ، −٤) ، (٥ ، ٠)

الحـــل

$$\frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٣ & -٤ & ١ \\ ٥ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٧ \text{ وحدة طول مربع}$$

حوظة : تم عن طريق الأقطار أو المحددات الرتبة الثانية .

تمرين (٤) : على المحددات

• أوجد قيمة المحددات الآتية من (١) إلى (٢١) :

(١) $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٥ \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$ (٣) $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix}$

(٤) $\begin{vmatrix} ٨ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ (٥) $\begin{vmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ (٦) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix}$

(٧) $\begin{vmatrix} ٦ & -٣ \\ ١٩ & -٧ \end{vmatrix}$ (٨) $\begin{vmatrix} أ + س & أ \\ ب + ص & ب \end{vmatrix}$ (٩) $\begin{vmatrix} س + ١ & س + ١ \\ ص + ١ & ص + ١ \end{vmatrix}$

(١٠) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ & ٤ \\ ٠ & ٧ & ٨ \end{vmatrix}$ (١١) $\begin{vmatrix} ٠ & ٥ & ٣ \\ ٢ & ٦ & ٧ \\ ٠ & ١٠ & ٢ \end{vmatrix}$ (١٢) $\begin{vmatrix} ٣ & -٤ & ٣ \\ ٢ & ٠ & -٣١ \\ ٥ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$

(١٣) $\begin{vmatrix} ١٢ & ٣ & ٢ \\ -٣ & ٧ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ (١٤) $\begin{vmatrix} ٦ & ٥ & ٦ \\ ٠ & ٥ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ (١٥) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٨ & ٢ & ٠ \\ ٦ & ٤ & ٣ \end{vmatrix}$

(١٦) $\begin{vmatrix} ٤ & ٢ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{vmatrix}$ (١٧) $\begin{vmatrix} -١ & ٧ & ٢ \\ ٣ & ٠ & ٥ \\ ٤ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ (١٨) $\begin{vmatrix} -٢ & ٤ & ٠ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ٥ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

(١٩) $\begin{vmatrix} ٠ & ٣ & ٠ \\ ٥ & ٩ & ٧ \\ ٠ & ٨ & ٠ \end{vmatrix}$ (٢٠) $\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٥ \\ ٠ & ٨ & ٩ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ (٢١) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٨ & ٦ & ٠ \\ ٨ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

(٢٢) أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه: أ(٢ ، ٤) ، ب(−٢ ، ٤) ، جـ(٠ ، −٢)

(٢٣) أوجد مساحة سطح المثلث س ص ع الذى فيه :
س(٣ ، ٣) ، ص(−٤ ، ٢) ، ع(١ ، −٤)

(٢٤) أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه :
أ(−٢ ، −٢) ، ب(٣ ، ١) ، جـ(−٤ ، ٣)

(٢٥) أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه :
أ(٠ ، ٢) ، ب(٣ ، ٥) ، جـ(−٣ ، ٢)

أولاً : حل أنظمة المعادلات الخطية في مجهولين :

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية في مجهولين :

أ س + ب ص = م ، جـ س + ء ص = هـ

فإن : $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{vmatrix}$ = (أ ء − ب جـ) تسمى محدد مصفوفة المعاملات وتقرأ (دلتا)

إذا كان $\Delta \neq ٠$ فإن المعادلات لها حل وحيد ، لكن إذا كان $\Delta = ٠$

فإن للمعادلات عدد لا نهائي من الحلول أو ليس لها حل .

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{م} & \text{ب} \\ \text{هـ} & \text{ء} \end{vmatrix}$ = (م ء − ب هـ) تسمى (محدد مصفوفة المجهول س)

وتقرأ (دلتا للمجهول س) . وضعنا أماكن معاملات س في دلتا الثوابت م ، هـ

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{م} \\ \text{جـ} & \text{هـ} \end{vmatrix}$ = (أ هـ − م جـ) تسمى (محدد مصفوفة المجهول ص)

وضعنا أماكن معاملات ص في دلتا الثوابت م ، هـ

∴ قيمة المجهول ∴ س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ ، ∴ ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$

• مثال (١) : حل نظام المعادلتين الآتيتين بطريقة كرامر :

س + ص = ٢ ، ٢س + ٣ص = ٥

الحل

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٣ − ٢ = ١

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٦ − ٥ = ١ ، $\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix}$ = ٥ − ٤ = ١

∴ س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ = $\frac{١}{١}$ = ١ ، ∴ ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ = ١

∴ م . ح = {(١ ، ١)}

ثانياً : حل أنظمة المعادلات الخطية في ثلاثة مجاهيل :

• مثال (١) : حل نظام المعادلات الخطية التالية بطريقة كرامر :

س + ص − ع = ٢ ، س + ٢ص + ع = ٧ ، ٣س − ص + ع = ١٠

الحل

$\Delta_{\text{(محدد المعاملات)}} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١- \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١- & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١- & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١- & ١ & ١- & ٣ \end{vmatrix}$

= ٢ + ٣ + ١ − (−٦ − ١ + ١) = ١٢

، $\Delta_{\text{س}}$ = محدد المجهول س تحصل عليه بتغيير عناصر العمود الأول (معاملات س) بالثوابت ٢ ، ٧ ، ١٠ وهي الحدود المطلقة في المعادلات الثلاثة بالترتيب .

، $\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١- \\ ٧ & ٢ & ١ \\ ١٠ & ١- & ١ \end{vmatrix} \begin{matrix} ٢ & ١ \\ ٧ & ٢ \\ ١٠ & ١- \end{matrix}$ = (٤ + ١٠ + ٧) − (−٢٠ − ٢ + ٧) = ٣٦

، $\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١- \\ ١ & ٧ & ١ \\ ٣ & ١٠ & ١ \end{vmatrix} \begin{matrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٧ \\ ٣ & ١٠ \end{matrix}$ = (٧ + ٦ − ١٠) − (−٢١ + ١٠ + ٢) = ١٢

، $\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٧ \\ ٣ & ١- & ١٠ \end{vmatrix} \begin{matrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{matrix}$ = (٢٠ + ٢١ − ٢) − (١٢ − ٧ + ١٠) = ٢٤

∴ س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ = $\frac{٣٦}{١٢}$ = ٣ ، ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ = $\frac{١٢}{١٢}$ = ١ ، ع = $\frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta}$ = $\frac{٢٤}{١٢}$ = ٢

∴ م . ح = {(٣ ، ١ ، ٢)}

تمرين (٥) : على حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

• أوجد مجموعة الحل بطريقة كرامر :

١. ٣س − ٥ص = ٨ ، س + ص = ٨

٢. ٢س − ٣ص = ٧ ، س + ص = −١

٣. ٢س + ٣ص = ٠ ، ٢س + ٦ص = ٠

٤. س − ٣ص = −٤ ، ٢س + ص = ٢

⑤ س + ٢ص = ٠ ، ٢س − ٣ص = ١

⑥ ٢س − ٣ص + ٥ع = ٧ ، ٣س + ٤ص + ٢ع − ١١ ، س − ٢ص + ٧ع = ١٦

⑦ ٢س + ص − ع = −١ ، ٢س − ص + ٤ع = ١ ، ٥س − ٣ص + ٢ع = ٢

⑧ ٢س + ص − ٢ع = ١٠ ، ٣س + ٢ص + ٢ع = ١ ، ٥س + ٤ص + ٣ع = ٤

⑨ س + ٢ص − ٣ع = ٦ ، ٢س − ص − ٤ع = ٢ ، ٤س + ٣ص − ٢ع = ١٤

⑩ ص + ٢س + ٣ع = ٦ ، ٢س − ص + ع = −٣ ، س − ٢ص + ٢ع = −١١

درس ٦ المعكوس الضربى للمصفوفة

إذا كان لدينا المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

$$I = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦-٥ & -٥+١٠ \\ ٣-٣ & -٥+٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

بما أن الناتج I ∴ كل منهما معكوس ضربى للآخر .

المصفوفة أ معكوس ضربى لـ ب ، والمصفوفة ب معكوس ضربى لـ أ

سؤال : هل كل المصفوفات لها معكوس ضربى ؟

الجواب: بعض المصفوفات ليس لها معكوسًا ضربيًا ، لأن شرط وجود معكوس ضربى أن يكون محدد المصفوفة ≠ ٠

• كيفية إيجاد المعكوس

نفرض أن المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{pmatrix}$ ويفرض أن $أ^{-١}$ هو المعكوس الضربى للمصفوفة أ ، وأن محدد أ = Δ ≠ ٠ فإن : $أ^{-١} = \frac{١}{Δ}\begin{pmatrix} ء & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix}$

• الخطوات : (١) بدلنا وضعى العنصرين من القطر الرئيسى .

(٢) تغيير إشارتى العنصرين فى القطر الآخر .

(٣) ضرب الناتج السابق × $\frac{١}{Δ}$ حيث Δ هو محدد المصفوفة

• مثال (١) : إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ أوجد $أ^{-١}$

الحل

Δ = $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix}$ = ١٥ − ٨ = ٧ ≠ ٠ ∴ المصفوفة لها معكوس ضربى

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{٧}\begin{pmatrix} ٥ & -٤ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٥}{٧} & \frac{-٤}{٧} \\ \frac{-٢}{٧} & \frac{٣}{٧} \end{pmatrix}$

• مثال (٢) : أوجد قيم أ التى تجعل للمصفوفة $\begin{pmatrix} أ & ٤ \\ ١٦ & أ \end{pmatrix}$ معكوسًا ضربيًا

الحل

∵ Δ = $\begin{vmatrix} أ & ٤ \\ ١٦ & أ \end{vmatrix}$ = $أ^٢$ − ٦٤ صح Δ = ٠ ∴ $أ^٢$ − ٦٤ = ٠

∴ $أ^٢$ = ٦٤ ∴ أ = ±٨

∴ ٨ ، −٨ تجعلان المصفوفة ليس لها معكوس ضربى .

∴ عندما أ ∈ ح − {٨ ، −٨} يكون للمصفوفة المعطاة معكوسًا ضربيًا .

• حل معادلتين آنيتين باستخدام معكوس المصفوفة :

إذا كان لدينا معادلتين : $أ_١س + ب_١ص = ك_١$ ، $أ_٢س + ب_٢ص = ك_٢$

فإن المعادلتين يمكن كتابتهما على صورة مصفوفة واحدة هكذا $\boxed{أ\,س = ج}$

حيث أ = $\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المعاملات .

، س = $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المجاهيل ، ج = $\begin{pmatrix} ك_١ \\ ك_٢ \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة الثوابت

∵ أ س = ج بالضرب × $أ^{-١}$ ∴ $أ^{-١}$ أ س = $أ^{-١}$ ج ∵ $أ^{-١}$ أ = I

$\boxed{∴ س = أ^{-١} ج}$

• مثال (٢): حل [illegible] باستخدام المصفوفات.

س + ٢ص = ٥ ، ٢س + ص = ٣

الحل

[illegible] = س ، ح = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$

[illegible] = ٤ − ١ = ١٠ المصفوفة ب معكوس

س = أ⁻¹ ح

س = [illegible] = $\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

س = ١ ، ص = ١ ، ح = {(١ ، ١)}

تمرين (٦): على المعكوس الضربي للمصفوفة

• أوجد معكوس المصفوفات الآتية إن أمكن من (١) إلى (١١):

١ [illegible]

٢ [illegible]

٣ ج = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

٤ [illegible]

٥ د = $\begin{pmatrix} ٩ & ٣ \\ ١٣ & ٣ \end{pmatrix}$

٦ و = $\begin{pmatrix} ٧ & ٦ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

٧ [illegible]

٨ ح = $\begin{pmatrix} ٢١ & -٣ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

٩ س = $\begin{pmatrix} ٥ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

١٠ [illegible]

١١ [illegible]

١٢ [illegible] $\begin{pmatrix} س & ٩ \\ ٤ & س \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي؟

١٣ أوجد قيم أ التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٣ & أ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي.

١٤ إذا كان أ × $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ = I فأوجد المصفوفة أ

١٥ إذا كان المصفوفة س × $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ − $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س

١٦ إذا كان ب = $\begin{pmatrix} س & -س ص \\ ٠ & ص \end{pmatrix}$ فأثبت أن ب⁻¹ = $\begin{pmatrix} \frac{١}{س} & ١ \\ ٠ & \frac{١}{ص} \end{pmatrix}$

حيث س ≠ ٠ ، س ص ≠ ٠

• حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات من (١٧) إلى (٢١)

١٧ ٣س − ٢ص = ٢ ، ٢س − ٥ص = ١

١٨ س − ٣ص = ٥ ، ٢س − ٥ص = ١

١٩ ٤س − ٣ص = ٢٠ ، ٥س − ص = ٤

٢٠ ٢س − ٢ص = ٣ ، س − ٣ص = ٢

٢١ ٢ص − ٥ = ٣س ، ٢س = ٣ − ص

٢٢ إذا كان ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، |ب| = ١ فأوجد المصفوفة ب

٢٣ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، أ ب = $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة ب

الوحدة الثانية البرمجة الخطية

درس ١ حل متباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد

• تمهيد: [illegible] س ≤ ٣ ، س > ٨ ، ٢س + ٩ < ٠ ،

٢س − ٥ ، ٢س − ٣س − ٥ ≥ ٢س + ٣ تسمى متباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد (حيث س ∈ ح)

• **معنى حل المتباينة فى ح:** هو إيجاد المجموعة [illegible] من ح بحيث يحقق كل عنصر [illegible] هذه المجموعة العلاقة المعطاة.

• **جدول علاقة [illegible] فى ح:**

[illegible] ∈ ح

[illegible]

[illegible]

[illegible] ∈ ح

[illegible]

[illegible]

• مثال (١): [illegible] الحل [illegible] س ∈ ح

الحل

[illegible]

• مثال (٢): [illegible]

الحل

[illegible]

• مثال (٣): [illegible] س ∈ ح

الحل

[illegible]

م ح = { − ٣/٢ ، [illegible] }

أو [illegible]

• مثال (٢): [illegible] الحل [illegible] س ∈ ح ويمثل على خط الأعداد

س − ٢ ، ٣س − ٤ ≥ س + ٤

الحل

[illegible]

س − ٢ ، ٣س − ٢ ، ٣س − ٤ ≥ س + ٤

[illegible]

−٢ ، ٢س − ٤ ≥ ٤ [illegible] الجميع الأعداد

٢ ، ٢س ≥ ٨ [illegible]

[illegible] س ≥ ٤

[illegible] م ح = [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

تمرين (١): على حل متباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد

• أوجد مجموعة الحل فى ح لكل من المتباينات التالية ومثلها بيانيا

١ [illegible]

٢ [illegible]

٣ [illegible] ≤ ٤

٤ [illegible]

٥ [illegible]

٦ [illegible]

⑦ س

⑨ س − ١ ≤ ٣س − ٥

⑪ ١ ≥ −س + ٢ ≥ ٢

⑬ س − ١ ≥ ٢س − ٥ < س + ٥

⑮ ٢س − ٣ ≥ ٣س − ٥ > س − ٣

⑩ ١ < س − ٣ ≥ ٣

⑫ −٣ < ٤س + ٥ ≥ ٧

⑭ ٣س − ٦ < ٢س + ٦ ≥ ٣س + ١٨

درس ٢ حل المتباينات للدرجة الأولى فى مجهولين (بيانيا)

• **تمهيد :** رسم أى مستقيم على صورة : أ س + ب ص = جـ

نوجد س = ٠ ونوجد ص ثم نضع ص = ٠ ونوجد س لمعادله ونضع ذلك فى جدول

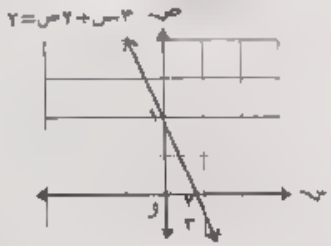
• **مثال (١) :** رسم المستقيمات الآتية :

(أ) ٣س + ٢ص = ٢ (ب) ٢س − ص = ٠ (جـ) ص = ٢س + ٥

الحل

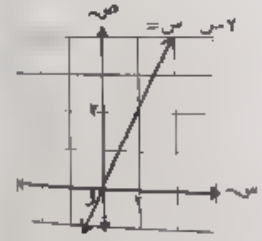
(أ) ٣س + ٢ص = ٢

س	٠	$\frac{٢}{٣}$
ص	١	٠



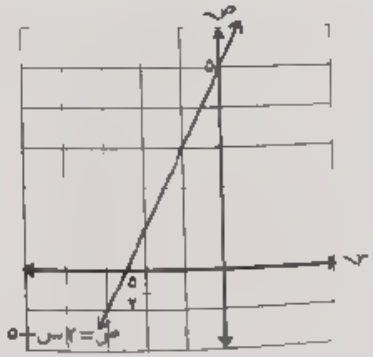
(ب) ٢س − ص = ٠

س	٠	١
ص	٠	٢



(جـ) ص = ٢س + ٥

س	٠	$-\frac{٥}{٢}$
ص	٥	٠



• **ملاحظة :**

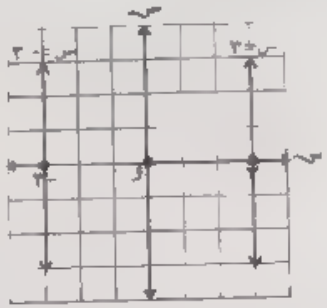
المستقيمات التى على صورة س = أ فهى توازى محور الصادات وتبعد عنه بمقدار أ

والمستقيمات التى على صورة ص = ب فهى توازى محور السينات وتبعد عنه بمقدار ب

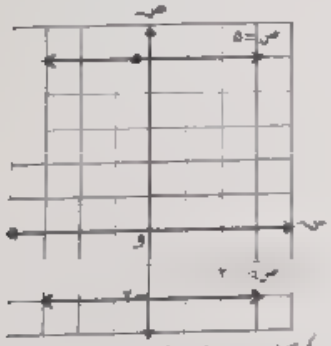
• **مثال (٢) :** رسم المستقيمات : (أ) س = ٣ ، س = ٣ فى رسم واحد

(ب) ص = ٥ ، ص = −٢ فى رسم واحد

الحل



حل (أ) كل منهما يوازى محور الصادات



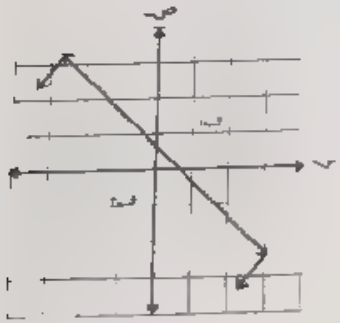
حل (ب) كل منهما يوازى محور السينات

• **ملاحظة هامة :** أى مستقيم على صورة أ س + ب ص = جـ يجزئ المستوى الديكارتى إلى ثلاثة مجموعات من النقط .

أولاً : مجموعة نقط المستقيم نفسه وهى نقط تحقق إحداثياتها المعادلة أ س + ب ص = جـ

ثانيًا : مجموعة نقط المستوى التى تقع على إحدى جانبى المستقيم فـ١ .

ثالثًا : مجموعة نقط المستوى التى تقع على الجانب الآخر للمستقيم فـ٢ .



• **تعريف :** المتباينة من الدرجة الأولى فى مجهولين فى ح × ح هى علاقة على الصورة : أ س + ب ص > جـ أ، أ س + ب ص ≤ جـ

أ، أ س + ب ص < جـ أ، أ س + ب ص ≥ جـ

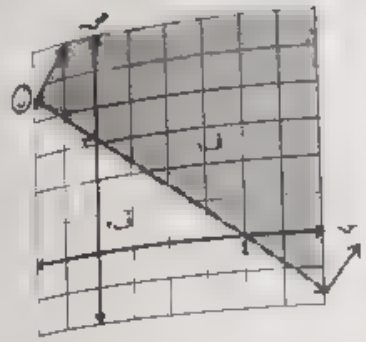
• **مجموعة حل المتباينة من الدرجة الاولى فى مجهولين :** هى مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتى ح × ح أى مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) التى تحقق المتباينة .

• مثال (٢) : مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينة : ٣س + ٤ص > ١٢ في ح × ح

طريقة الحل :

أولاً : نرسم المستقيم ٣س + ٤ص = ١٢ بخط متقطع

س	٠	٤
ص	٣	٠



ثانيًا : تحديد نصف المستوى الذي يمثل حل المتباينة وذلك بالتعويض بإحداثي نقطة الأصل (٠ ، ٠)

∴ ٣ × ٠ + ٤ × ٠ ≯ ١٢ ∴ ٠ ≯ ١٢

∴ مجموعة الحل ليست المنطقة التي تقع فيها نقطة الأصل ولذلك نظلل المنطقة الأخرى

• ملاحظات :

(١) إذا كانت المتباينة يوجد فيها (< أو >) يرسم المستقيم بخط متقطع .

(٢) إذا كانت المتباينة يوجد فيها (≤ أو ≥) يرسم المستقيم بخط متصل .

(٣) إذا وضع ≤ بدلاً من < فإن مجموعة هي المنطقة ف مع مجموعة نقط المستقيم ٣س + ٤ص = ١٢ ويرسم المستقيم غير متقطع

(٤) إذا وضع < بدلاً من > فإن مجموعة الحل هي المنطقة ف

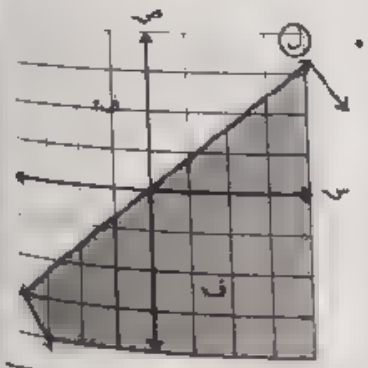
(٥) إذا وضع ≥ بدلاً من > فإن مجموعة الحل اتحاد نصف المستوى ف مضافًا إليه نقط المستقيم ل نفسه ويرسم المستقيم غير متقطع .

• مثال (٢) : مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينة . ص − س ≥ ٠

الحل

أولاً : نرسم المستقيم ل الذي معادلته ص − س = ٠

س	٠	١
ص	٠	١



يرسم المستقيم متصل

∵ المستقيم ص − س = ٠

يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

لذا نختار نقطة أخرى غير نقطة الأصل ولتكن النقطة (٢ ، ٠) ثم نعوض في طرفي المتباينة فنجد أن : ٠ − ٢ ≥ ٠ ∴ (٢ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة .

ثالثًا : مجموعة الحل هي اتحاد نصف المستوى ف مضافًا إليه نقط المستقيم ل نفسه .

• ملاحظات :

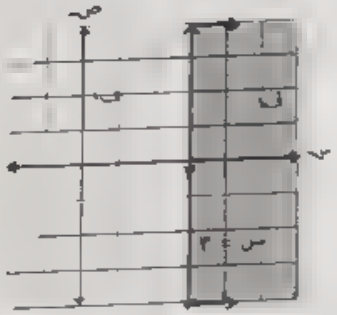
(١) حل المتباينة : ص − س < ٠ هي نصف المستوى ف فقط .

(٢) حل المتباينة : ص − س > ٠ هي نصف المستوى ف .

(٣) حل المتباينة : ص − س ≥ ٠ هي اتحاد نصف المستوى ف مضافًا إليه نقط المستقيم ل .

• مثال (٢) : حل المتباينة (أ) س ≤ ٣ ، (ب) س > −٢ حيث مجموعة الحل في ح × ح

الحل



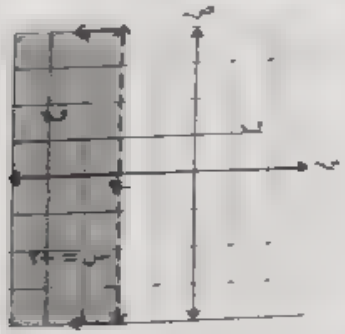
∵ س = ٣ هو مستقيم يوازي محور الصادات كما بالرسم

∵ (٠ ، ٠) ∉ مجموعة الحل لأن ٠ ≯ ٣

∴ مجموعة الحل هي منطقة ف مع نقط المستقيم س = ٣

• لاحظ : إن مجموعة حل س ≤ ٣ هي ف مع نقط المستقيم س = ٣

(ب) س = −٢ هو مستقيم يوازي محور الصادات كما بالرسم ويرسم المستقيم متقاطع لأن س > −٢



∵ (٠ ، ٠) ∉ مجموعة الحل لأن ٠ ≯ −٢

∴ مجموعة الحل هي ف

• لاحظ : إن مجموعة حل س > −٢ هي ف

تمرين (٢) : على حل المتباينات للدرجة الأولى في مجهولين (بيانيًا)

مثل بيانيًا مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية مجموعة الحل في ح × ح

(١) س > ٣ (٢) ص ≥ ١ (٣) ص > −٣

٤ س ص > ٠
٥ س − ص > ٥
٦ س + ص < ١
٧ س − ص ≤ ٤
٨ ٢س + ٣ص > ٦
٩ ٢س + ٥ص > ١٠
١٠ ٥س − ٣ص > ٠
١١ ٣س + ٤ص ≤ ٠
١٢ $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} > ١$
١٣ $\frac{٣س}{٢} - \frac{٢ص}{٣} < ١$
١٤ $\frac{س}{٢} - ٣ \leq ص$
١٥ $ص \leq ٢ - \frac{س}{٣}$

درس ٣ الحل البياني لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولى في مجهولين

لإيجاد الحل البياني لمتباينتين نتبع الخطوات التالية :

(١) نوجد أو نظلل نصف المستوى الممثل لمجموعة حل المتباينة الأولى .

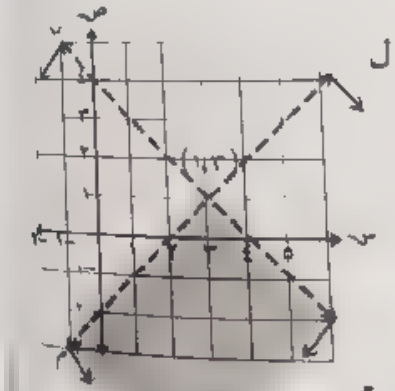
(٢) نوجد أو نظلل نصف المستوى الممثل لمجموعة حل المتباينة الثانية

(٣) مجموعة حل المتباينتين هي المنطقة المشتركة بين هاتين المنطقتين .

• **ملحوظة :** من الأفضل تحديد نقطة تقاطع المستقيمين الممثلين لهذين المتباينتين

• مثال (١) : مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينتين : س + ص < ٤ ، س − ص > ٢ في ح × ح

الحل



أولاً : نرسم المستقيم س + ص = ٤ متقطعًا وليكن ل

س	٠	٤
ص	٤	٠

(٠ ، ٠) ∈ حل المتباينة س + ص < ٤

لأن ٠ < ٤ ∴ منطقة الحل لهذه المتباينة هي المنطقة التي تقع فيها نقطة الأصل

ثانيًا : نرسم المستقيم : س − ص = ٢ متقطعًا وليكن م

س	٠	٢
ص	−٢	٠

(٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة (٠ ≯ ٢) ∴ منطقة الحل لا تقع فيها نقطة الأصل

نقطة التقاطع للمستقيمين س + ص = ٤ ، س − ص = ٢ هي (٣ ، ١)

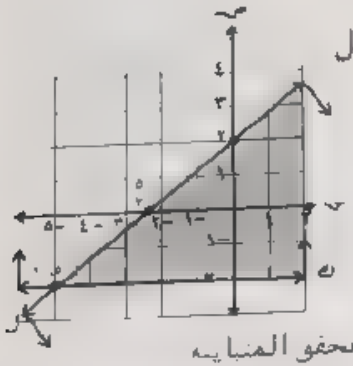
• **ملحوظة :** المنطقة المظللة هي مجموعة الحل للمتباينتين

مجموعة كل من نقط المستقيمين لا تنتمي إلى الحل

• مثال (٢) : مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينتين في ح × ح :

٤س − ٥ص ≤ −١٠ ، ص + ٢ ≥ ٠

الحل



أولاً : نرسم المستقيم ص = −٢ وليكن ك وهو متصل وهو مستقيم يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، −٢) ∵ (٠ ، ٠) تحقق المتباينة ص ≥ −٢ لأن ٠ ≥ −٢

∴ مجموعة حل المتباينة تقع فيها نقطة الأصل

ثانيًا : نرسم المستقيم : ٤س − ٥ص = −١٠ غير متقطع وليكن ل وواضح أن نقطة الأصل (٠ ، ٠) تحقق المتباينة

س	٠	$\frac{٥}{٢}$
ص	٢	٠

نقطة تقاطع المستقيمين (−٥ ، −٢) الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينتين

• مثال (٣) : أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢س + ص < ٢ ، س + ٢ص ≥ ٣

الحل

نرسم المستقيمات : ل١ : س = ٠

وهو محور الصادات ومجموعة حل س ≥ ٠

ل٢ : ص = ٠

وهو محور السينات ومجموعة حل ص ≥ ٠

ل٣ : ٢س + ص = ٢ وهو خط متقطع

س	٠	١
ص	٢	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة الحل لأن ٠ < ٢

ل₂ : س + ٢ص = ٣ خط غير متقطع

س	٠	٣
ص	$\frac{٣}{٢}$	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة الحل لأن ٠ ≥ ٢

نجمع كل ذلك في شكل واحد .

الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينات معا

نقطة تقاطع المستقيمين هي ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٤}{٣}$)

• **ملحوظة هامة :** س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

نعني أن مجموعة الحل تقع في الربع الأول

تمرين (٢) : على الحل البياني لمتباينتين أو أكثر

• **مثل بيانيا مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين (مجموعة الحل في ح × ح):**

١ س − ص > ١ ، س + ص < ٣

٢ ٢س − ص > −٣ ، س + ص < ١

٣ س + $\frac{٣}{٤}$ص > −٣ ، س − $\frac{٢}{٥}$ص > −١

٤ س − ص > ٠ ، ٢س + ص > ٥

٥ س + ص < ٣ ، س < ص − ١

٦ ٢س − ٥ص ≤ −٢ ، ص > −٢

٧ ص ≤ س − ٢ ، ص ≥ ٢س + ٤

٨ ٢س − ص > ٥ ، ص ≥ ٠

٩ س < ٣ + ٢ص ، س ≥ ٠

١٠ ص > ٢ ، س + ص ≤ −٢

• **أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية بيانيا (مجموعة الحل في ح × ح) :**

١١ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ > ص ، ص + ٢س < ٤

١٢ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≥ ٤

١٣ س ≤ −٢ ، ص ≥ ٥ ، س − ص ≥ ٣

١٤ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٣س + ٢ص > ٦ ، س + ص ≤ ٢

درس ٤ البرمجة الخطية

البرمجة الخطية : من العلوم الحديثة وهي في نفس الوقت عملية إيجاد الحل الأمثل لمشكلة ما باستخدام الطرق الرياضية

فالقيود والإمكانيات الموجودة في المشكلة أو التي تفرضها طبيعة المشكلة تتحول إلى متباينات والهدف يتحول إلى دالة يسمى **دالة الهدف** وهي في الغالب أكبر قيمة لربح معين أو أقل قيمة لتكاليف معينة .

• **مثال (١) :** المتباينات التالية هي قيود وإمكانيات مشكلة ما

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢س + ٣ص ≤ ١٢ ، س − ص ≤ ٥

وإذا كانت دالة الهدف ر(س ، ص) = ٣س + ٤ص أوجد أكبر قيمة لدالة الهدف

الحل

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يدلان معًا على أن الحلول في الربع الأول في المستوى الديكارتي

رسم المستقيم : ٢س + ٣ص = ١٢

يرسم متصلاً ونرمز له بالرمز م

س	٠	٦
ص	٤	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة ٢س + ٣ص ≤ ١٢

رسم المستقيم س + ص = ٥

يرسم متصلاً ونرمز له بالرمز ن

س	٠	٥
ص	٥	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة س + ص ≤ ٥

[illegible]

تمرين (٤) : على البرمجة الخطية

عين مجموعة حل المتباينات الآتية بيانيًا في المستوى ح × ح ثم عين من مجموعة الحل نقطة س ، ص التي تجعل من دالة الهدف أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن

١ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ص ≤ ٨ ، س + ص ≤ ٩

أقصى قيمة لـ ق = س + ٥ص + ١ص

٢ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٣ص ≤ ٩ ، ٣س + ٤ص ≤ ١٢

أقصى قيمة لـ ق = س + ٥ص + ١٠ص

٣ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ١ص ≤ ٣٢ ، ١٢س + ١ص ≤ ١٢٠

أقصى قيمة لـ ق = ٢٥س + ٤٥ص

٤ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٣س + ٢س ≤ ٩ ، ٢س + ص ≤ ١٠

أقصى قيمة لـ ق = ٢س + ٣ص + ٥

٥ −٣ ≤ س ≤ ٣ ، −٤ ≤ ص ≤ ٤

٤س + ٣ص ≤ ١٢ ، ٤س + ٣ص ≤ −١٢

أقصى قيمة لـ ق = س + ٣ص + ٥

• [illegible]

[illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	١٥٠٠	٢٠٠٠	٩٠٠٠٠
[illegible]	١٢	١	٣٢٠
[illegible]	س	ص	س ، ص ≥ ٠ ، ص ≤ ١٠٠

[illegible] س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ١٢س + ١ص ≤ ٣٢٠ ، ١٥٠٠س + ٢٠٠٠ص ≤ ٩٠٠٠٠

[illegible] س ، ص = ٣٠٠س + ٣٠٠ص

[illegible]

١٢س + ١ص = ٣٢٠ [illegible] ٤

٣س + ٢ص = ٩٠

[illegible] مجموعة حل [illegible]

س	٠	٣٠
ص	٤٥	٠

[illegible]

١٥٠٠س + ٢٠٠٠ص = ٩٠٠٠٠ [illegible] ٥٠٠

٣س + ٤ص = ١٢٠

س	٠	٤٠
ص	٣٠	٠

(٠ ، ٠) ∉ مجموعة حل [illegible] ، نقطة تقاطع المستقيمين (٢٠ ، ١٥)

∴ [illegible] الحل هي (٠ ، ٠) ، (٠ ، ٣٠) ، (٢٠ ، ١٥) ، (٤٠ ، ٠)

[illegible] = (٣٠ ، ٠) = ٣٠٠ × ٣٠ + ٠ = ٩٠٠٠

[illegible] = (٢٠ ، ١٥) = ٣٠٠ × ٢٠ + ٣٠٠ × ١٥ = ١٠٥٠٠

[illegible] عند (٢٠ ، ١٥) وهى ١٠٥٠٠

عدد [illegible] = ٢٠ × ١٠٠ = ٢٠٠٠ رول

عدد [illegible] = ١٥ × ١٠٠ = ١٥٠٠ علبة غراء

تمرين (٥) : على المسائل الكلامية على البرمجة الخطية

١ [illegible]

٢ [illegible]

٣ [illegible] ٤٨ ساعة من الوقت [illegible] في صنع طرازين من الأثاث ويحتاج الطراز الأول إلى وحدتين من الخشب ، ٦ ساعات عمل ويحتاج الطراز الثاني إلى وحدة واحدة من

لخشب ، ٨ ساعات عمل [illegible] الأول ١٢٠٠ جنيه [illegible] ٨٠٠ جنيه ، فكم عدد [illegible] ؟

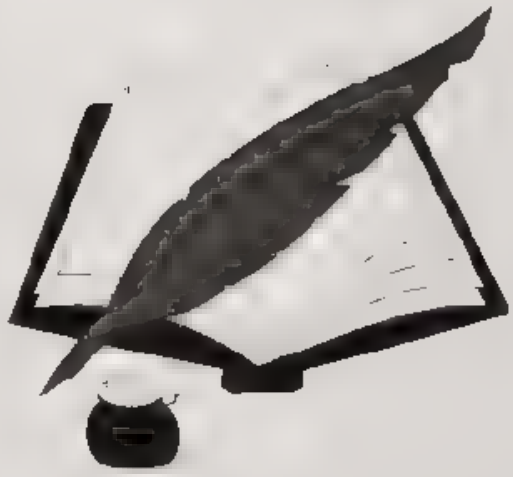
٤ [illegible] ٦٠ مترا من الصوف ، ٢٤ [illegible]

٥ [illegible] ٣ [illegible] ٢ [illegible] ٥ جنيهات [illegible] ؟

٦ تنتج شركة صناعية نوعين من المنتجات وتستخدم في إنتاج كل منها نوعين من الآلات [illegible] (أ) والآلة (ب) ويحتاج وحدة المنتج الأولى إلى $\frac{3}{4}$ ساعة تشغيل على الآلة (أ) ، $\frac{1}{4}$ ساعة تشغيل على الآلة (ب) ، وتحتاج وحدة المنتج الثاني إلى $\frac{1}{4}$ ساعة تشغيل على الآلة (أ) ، $\frac{1}{3}$ ساعة تشغيل على الآلة (ب) . فإذا فرض أن الحد الأقصى لفترة تشغيل الآلة (أ) في اليوم هو ١٢ ساعة وبالنسبة للآلة (ب) هو ١٠ ساعات في اليوم وعلم أن الوحدة من المنتج الأول [illegible] ربحا للشركة قدره ستة جنيهات وأن الوحدة من المنتج الثاني تدر ربحا للشركة قدره ٥ جنيهات ، حدد برنامج الإنتاج الأمثل الذى يحقق للشركة أكبر ربح ممكن

ثانيًا

حساب المثلثات



درس ١ المتطابقات المثلثية

• الفارق بين مفهومي المعادلة والمتطابقة

• **المعادلة :** هي مساويه صحيحه لبعض الأعداد الحقيقة التي تحقق هذه المتساوية .

فمثلاً : حا $\theta - \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ حيث $\theta \in]٠ ، ٢\pi[$

القيم التي تحقق هذه المتساوية هي : $\frac{\pi}{٣} = ٦٠°$ ، $\frac{٢\pi}{٣} = ١٢٠°$ فقط

ولذلك تسمى هذه المتساوية معادلة

• **المتطابقة :** هي مساوية صحيحة لجميع قيم المتغير الحقيقية .

فمثلاً : حا$(\frac{\pi}{٢} ، \theta)$ = حتا θ هي متطابقة على أساس أن المتغير θ يأخذ أي قيمة فتحقق المتساوية ، فلذا هي تسمى متطابقة .

• المتطابقات المثلثية الأساسية:

أولاً : الدوال الأساسية ومقلوباتها :

(١) حا θ × حتا θ = ١ ⇐ حا $\theta = \frac{١}{\text{قتا } \theta}$ ، قتا $\theta = \frac{١}{\text{حا } \theta}$

(٢) حتا θ قا θ = ١ (٣) طا θ طتا θ = ١

ثانيًا : الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين :

(١) حا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = حتا θ (٢) حتا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = حا θ

(٣) طا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = طتا θ (٤) قتا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = قا θ

(٥) قا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = قتا θ (٦) طا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = طتا θ

ثالثًا : متطابقة الزاويتين θ ، $-\theta$:

حا$(-\theta)$ = −حا θ ، قتا$(-\theta)$ = −قتا θ ، طا$(-\theta)$ = −طاθ ، طتا$(-\theta)$ = −طتا θ

لكن مع : حتا$(-\theta)$ = حتا θ ، قا$(-\theta)$ = قا θ

رابعًا : متطابقات فيثاغورث :

(١) لعلاقة الأساسية هي : حا$^٢\theta$ + حتا$^٢\theta$ = ١ ⟵ (١)

بقسمة طرفي العلاقة (١) على حا$^٢\theta$ ∴ ١ + طا$^٢\theta$ = قا$^٢\theta$ ⟵ (٢)

وبقسمة طرفى العلاقة (١) على حتا^2 θ ∴ ١ + طتا^2 θ = قتا^2 θ ⟵ (٣)

خامسًا : طا θ = $\frac{\text{حا } \theta}{\text{حتا } \theta}$ ، طتا θ = $\frac{\text{حتا } \theta}{\text{حا } \theta}$

• ملحوظة هامه : المجموعات الخمسة السابقة تعتبر أمثلة كمتطابقات مثلثية .

امثلة محلولة

مثال محلول (١) : أثبت أن طا هـ + طتا هـ = ق هـ قتا هـ

الحـــل

الأيمن = $\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}} + \frac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}} = \frac{\text{حا}^2\text{ هـ} + \text{حتا}^2\text{ هـ}}{\text{حا هـ حتا هـ}} = \frac{1}{\text{حا هـ حتا هـ}}$

$\frac{1}{\text{حا هـ}} \times \frac{1}{\text{حتا هـ}}$ = قا هـ قتا هـ = الأيسر

مثال محلول (٢) :

أثبت أن : (حا هـ + حتا هـ) (طا هـ + طتا هـ) = قا هـ + قتا هـ

الحـــل

الأيمن = (حا هـ + حتا هـ) $\left(\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}} + \frac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}}\right)$

= (حا هـ + حتا هـ) $\left(\frac{\text{حا}^2\text{ هـ} + \text{حتا}^2\text{ هـ}}{\text{حا هـ حتا هـ}}\right)$

= (حا هـ + حتا هـ) $\left(\frac{1}{\text{حا هـ حتا هـ}}\right)$

= $\frac{\cancel{\text{حا هـ}}}{\cancel{\text{حا هـ}}\ \text{حتا هـ}} + \frac{\cancel{\text{حتا هـ}}}{\text{حا هـ}\ \cancel{\text{حتا هـ}}}$

= $\frac{1}{\text{حتا هـ}} + \frac{1}{\text{حا هـ}}$ = قا هـ + قتا هـ = الأيسر

مثال محلول (٣) : أثبت أن : $\frac{\text{٢طتا جـ}}{\text{١ + طتا}^2\text{ جـ}}$ = ٢حا جـ حتا جـ

الحـــل

الأيمن = $\frac{\text{حتا جـ}}{\text{حا}^2\text{ جـ}} \div \frac{\text{١}}{\text{حتا}^2\text{ جـ}} = \frac{\text{٢حتا جـ}}{\text{حا جـ}} \times \text{حتا}^2\text{ جـ}$ = ٢حا جـ حتا جـ = الأيسر

مثال محلول (٤) : أثبت أن : $\frac{\text{طا هـ − طتا هـ}}{\text{طا هـ + طتا هـ}}$ = ٢حا^2 هـ − ١

الحـــل

لأيمن = $\frac{\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}} - \frac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}}}{\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}} + \frac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}}} = \frac{\frac{\text{حا}^2\text{ هـ} - \text{حتا}^2\text{ هـ}}{\text{حا هـ حتا هـ}}}{\frac{\text{حا}^2\text{ هـ} + \text{حتا}^2\text{ هـ}}{\text{حا هـ حتا هـ}}}$

= حا^2 هـ − حتا^2 هـ = حا^2 هـ − (١ − حا^2 هـ)

= حا^2 هـ − ١ + حا^2 هـ = ٢حا^2 هـ − ١ = الأيسر

مثال محلول (٥) : أثبت أن : $\frac{\text{٢حا}^3\text{ هـ − حا هـ}}{\text{حتا هـ − ٢حتا}^3\text{ هـ}}$ = طا هـ

الحـــل

لأيمن = $\frac{\text{حا هـ (٢حا}^2\text{ هـ − ١)}}{\text{حتا هـ (١ − ٢حتا}^2\text{ هـ)}} = \frac{\text{حا هـ (٢(١ − حتا}^2\text{ هـ) − ١)}}{\text{حتا هـ (١ − ٢حتا}^2\text{ هـ)}}$

= $\frac{\text{حا هـ (٢ − ٢حتا}^2\text{ هـ − ١)}}{\text{حتا هـ (١ − ٢حتا}^2\text{ هـ)}}$

= $\frac{\text{حا هـ}\cancel{\text{(١ − ٢حتا}^2\text{ هـ)}}}{\text{حتا هـ}\cancel{\text{(١ − ٢حتا}^2\text{ هـ)}}}$ = طا هـ = الأيسر

تمرين (١) : على المتطابقات المثلثية

• **مجموعة (أ) :**

١ أى من العلاقات الآتية تمثل معادلة وأيهما تمثل متطابقة :

[أ] حا θ = $\frac{1}{2}$ [ب] حتا θ = $\frac{1}{2}$

[جـ] حتا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ [د] طا $\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right)$ = −طتا θ

[هـ] حا(π − θ) = حا θ

[ز] قا(π/٢ − θ) = قتا θ

٢ ضع فى أبسط صورة :

[أ] (حا θ + حتا θ)² − ٢حا حتا θ [ب] (١ + طا² θ)/(١ + طتا² θ)

[جـ] ١/حتا² θ − ١/طتا² θ [د] حتا(π/٢ − θ) قا(π/٢ − θ)

[هـ] حا(π/٢ − θ) / حتا(π/٢ − θ) [و] طا θ قتا θ حـ(π/٢ − θ)

[ز] حا(π/٢ − θ) / حتا(π/٢ − θ) − حا θ / حتا(π − θ) [ح] حا(θ − π) / حتا(π/٢ − θ) + حا² θ / (١ − حتا² θ)

[ط] حا θ قا θ طتا θ + قتا θ طا θ حتا θ

٣ أثبت صحة المتطابقات التالية :

[أ] (١ + طتا² θ)/(١ + طا² θ) = طتا² θ [ب] (طا θ + طتا θ)/(قا θ + قتا θ) = ١

[جـ] (قا θ − طا θ)² = (١ − حا θ)/(١ + حا θ) [د] (١ − حا² θ)(١ − حتا² θ)/طا² θ = حتا² θ

[هـ] حا θ حتا θ / طا θ + قا θ / (قا θ قتا θ) = ١

• مجموعة (ب) :

١ (حتا² جـ − حا² جـ)/(حتا جـ − حا جـ) = حتا جـ + حا جـ

٢ حتا² جـ + حا² جـ − حتا² جـ + حا² جـ

٣ قا² جـ + قا² جـ = قتا² جـ − قا² جـ

٤ (ط س + طتا س)² = قا² س + قتا² س

٥ حتا جـ − حتا ب = (١ − حتا² ب)/(حتا ب)

٦ جتا س + جا س = قا س قتا س

٧ ١/طا² أ + ١ = ١/حا² أ

٨ ١ − طا⁴ جـ = ٢قا² جـ − قا⁴ جـ

٩ (حا³ س + حتا³ س)/(حا س + حتا س) + (حا³ س − حتا³ س)/(حا س − حتا س) = ٢

١٠ طا² جـ − طا² د = (حا² جـ − حا² د)/(حا² جـ . حتا² د)

١١ طتا أ ÷ قا أ قتا أ = ١ − حا² أ

درس ٢ حل المعادلات المثلثية

• مثال (١) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : حا س = ١/٢ حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°
ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحل

∵ الزاوية الحادة التى جيبها = ١/٢ هى ٣٠°

∴ الزاوية س تقع فى الربع الأول أو الربع الثانى الحسب موجب

∴ س = ٣٠° أو س = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠° حيث س ∈ [٠° ، ٣٦٠°]

∴ م . ح = {π/٦ ، ٥π/٦}

• الحل العام : نضيف لكل ناتج ٢πك حيث ك ∈ ص

∴ مجموعة الحل العام : {π/٦ + ٢πك ، ٥π/٦ + ٢πك}

• مثال (٢) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : جتا θ = ١/٢ فى ٠ ≤ θ ≤ ٢π
ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحـل

الزاوية الحادة التي جتا جـ هي $\frac{1}{\sqrt{2}}$ هي $45° = \frac{\pi}{4}$

∴ جتا (موجبة) ∴ الزاوية تقع في الربع الأول أو الربع

∴ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $\theta = 360° - 45° = 315° = \frac{7\pi}{4}$

∴ م . ح = $\{\frac{\pi}{4} ، \frac{7\pi}{4}\}$

• **ملحوظة هامة:** $315°$ تكافئ $-45°$ ∴ م . ح = $\{\frac{\pi}{4} ، -\frac{\pi}{4}\}$

• **الحل العام:** نضيف لكل ناتج $2\pi ن$

∴ مجموعة الحل العام: $\{\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi ن\}$ حيث ن ∈ ص

• **ملحوظة:** الحل العام يمكن أن يكون: $\frac{\pi}{4} + 2\pi ن$ أو $\frac{7\pi}{4} + 2\pi ن$

• مثال (٣): أوجد مجموعة الحل للمعادلة: ظا θ = $\sqrt{3}$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$ ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة.

الحـل

∵ ظا θ = $\sqrt{3}$ ∴ $\theta = \frac{\pi}{3}$ ∴ ظا (موجبة) في الربع الأول والثالث.

∴ م . ح في $[0 ، 2\pi]$ هي $\frac{\pi}{3}$ ، $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

• **الحل العام:** نضيف لناتج الأول فقط $\pi ن$ وهي مع لظا ، طتا

∴ الحل العام: $\frac{\pi}{3} + \pi ن$

• مثال (٤): أوجد مجموعة حل المعادلة: ظا θ = ٢جا θ حيث $\theta \in [0 ، 360°]$

الحـل

∴ $\frac{جا\ \theta}{جتا\ \theta}$ = ٢جا θ ∴ جا θ = ٢جا θ جتا θ

∴ جا θ − ٢جا θ جتا θ = ٠ ∴ جا θ(١ − ٢جتا θ) = ٠

∴ جا θ = ٠ أو جتا θ = $\frac{1}{2}$

∴ عندما جا θ = ٠ ∴ θ = ٠ أو ١٨٠° ، ٣٦٠°

عندما جتا θ = $\frac{1}{2}$ ∴ θ = ٦٠° ، ٣٠٠°

∴ م . ح = {٠ ، ٦٠° ، ١٨٠° ، ٣٠٠° ، ٣٦٠°}

• مثال (٥): حل المعادلة: ظا θ − ٢جا θ = ١ حيث $\theta \in [0 ، 360°]$

الحـل

ظا θ = $\frac{جا\ \theta}{جتا\ \theta}$ ∴ $\frac{جا\ \theta}{جتا\ \theta}$ − ٢جا θ = ١

∴ ١ − ٢جا² θ = جتا θ ، ٢جتا² θ + جتا θ − ١ = ٠

∴ (٢جتا θ − ١)(جتا θ + ١) = ٠

∴ ٢جتا θ − ١ = ٠ ، جتا θ = −١

جتا θ = $\frac{1}{2}$ | θ = ١٨٠°

∴ θ = ٦٠° ، ٣٠٠°

∴ م . ح = {٦٠° ، ١٨٠° ، ٣٠٠°}

تمرين (٢): على حل المعادلات المثلثية

• مجموعة (١):

• أوجد مجموعة حل المعادلات التالية: حيث صفر° ≤ س ≤ ٣٦٠°

١ جا س = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (٤٥° ، ١٣٥°)

٢ جتا س = $-\frac{1}{2}$ (١٢٠° ، ٢٤٠°)

٣ ظا² س = ٣ (٦٠° ، ١٢٠° ، ٢٤٠° ، ٣٠٠°)

٤ جا س = جتا س (٤٥° ، ٢٢٥°)

٥ ٢جا س = ظا س (٠° ، ١٨٠° ، ٦٠° ، ٣٠٠°)

٦ ٢جا س − قتا س = ١ (٢١٠° ، ٣٣٠° ، ٩٠°)

٧ جا² س − ٢جتا س + $\frac{1}{4}$ = ٠ (٦٠° ، ٣٠٠°)

٨ ٢جا س − ٤جتا س = صفر (٦٣° ٢٦َ ، ٢٤٣° ٢٦َ)

٩ ٢جتا² س = ٥جتا س + ٣ (١٢٠° ، ٢٤٠°)

١٠ جا س = ٢ (ليس لها حل)

١١ ظ س = −١

١٢ جا² θ − جتا² θ = $\frac{1}{2}$

١٣ ٥ ظتا² θ − ٦ قتا θ = ٣

• مجموعة ب • أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية

١ [illegible] = ٠

٢ [illegible] = ٣/٢

٣ [illegible] = ٠

٤ [illegible] = ٣/٢

٥ [illegible] = ٠

٦ [illegible] = [illegible]

٧ [illegible] = ٠

٨ [illegible] = ٠

٩ [illegible] = ٠

درس ٣ حل المثلث القائم الزاوية

• [illegible]

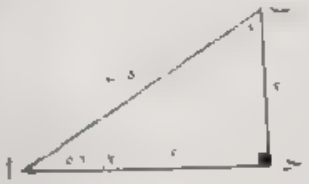
• [illegible]

• [illegible]

• [illegible]

$$\text{جتا الزاوية} = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الضلع المقابل}}$$

• مثال (١) :



في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في جـ حيث :

ق(∠أ) = ١٢ ٥٦° ، أ ب = ٥٠ سم

الحل

ق(∠ب) = ٩٠° − ١٢ ٥٦° = ٤٨ ٣٣°

(90 − 56 . »» 12 »» = 33° 48')

∵ ب جـ / أ ب = جا أ

∴ ب جـ = أ ب جا أ = ٥٠ × جا ١٢ ٥٦° ≃ ٤١,٥ سم

(50 × sin 56 »» 12 »» = 41 5)

أ جـ / أ ب = جتا أ

أ جـ = أ ب جتا أ = ٥٠ جتا ١٢ ٥٦° ≃ ٢٧,٨ سم

• [illegible]

[illegible]

• مثال (٢) : [illegible]

الحل

١٢,٥

٢٤,٥

[illegible]

[illegible] = ٢٧ ١ ٥١

ق(∠ب) = ٩٠° − ق(∠جـ) = ٩٠° − ٢٧ ١ ٥١ = ٦٢ ٥٨ ٨°

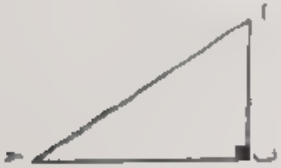
[illegible] = ١٢,٥ / [illegible] ، [illegible] = ١٢,٥ / [illegible]

[illegible]

(12 5 ÷ sin 27° 1' 51" = 27 5)

أو أ جـ = √(١٢,٥)² + (٢٤,٥)² ≃ ٢٧,٥ سم

• **ملحوظة هامة :** إذا علم طولى ضلعين فى Δ قائم الزاوية فيمكن إيجاد طول الضلع الثالث باستخدام فيثاغورث :



(أ جـ)² = (أ ب)² + (ب جـ)²

(أ ب)² = (أ جـ)² − (ب جـ)²

(ب جـ)² = (أ جـ)² − (أ ب)²

[illegible]

٢ ضع فى أبسط صورة :

أ) $(\text{جتا}\,\theta + \text{جا}\,\theta)^2 - 2\,\text{جا}\,\text{جتا}\,\theta$ [ب] $\dfrac{1 + \text{ظا}^2\theta}{1 + \text{ظتا}^2\theta}$

جـ) [illegible] $\text{جا}^2\theta$ [illegible] [د] $\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \theta)\,\text{قا}(\frac{\pi}{2} - \theta)$

هـ) $\dfrac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - \theta)}$ [و] $\text{ظا}\,\theta\,\text{قا}\,\theta\,\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \theta)$

ز) $\dfrac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \theta)} - \dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جا}(\pi - \theta)}$ ، ح) $\dfrac{\text{جا}(\pi - \theta)}{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \theta)} + 1 - \text{جا}^2\theta$

ط) $\text{جا}\,\theta\,\text{قا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta + \text{قتا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

٣ أثبت صحة المتطابقات التالية :

أ) $\dfrac{1 - \text{ظا}^2\theta}{1 + \text{ظا}^2\theta} = \text{ظتا}^2\theta$ [ب] $\dfrac{\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta}{\text{قا}\,\theta + \text{قتا}\,\theta} - 1$

جـ) $(\text{قا}\,\theta - \text{ظا}\,\theta)^2 = \dfrac{1 - \text{جا}\,\theta}{1 + \text{جا}\,\theta}$ [د] $\dfrac{(1 - \text{جا}^2\theta)(1 - \text{جتا}^2\theta)}{\text{ظا}^2\theta} = \text{جتا}^4\theta$

هـ) $\dfrac{\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}{\text{ظا}\,\theta} + \dfrac{\text{قا}\,\theta}{\text{قا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta} = 1$

• مجموعة ب :

١ $\dfrac{\text{جا}\,\text{جـ} - \text{جا}^3\text{جـ}}{\text{جتا}\,\text{جـ} - \text{جتا}^3\text{جـ}} = \text{جتا}\,\text{جـ} + \text{جا}\,\text{جـ}$

٢ $\text{جا}^3\text{جـ} - \text{جتا}^3\text{جـ} = \text{جا}^2\text{جـ} + \text{جا}^2\text{جـ}$

٣ $\text{قا}^2\text{جـ} - \text{قتا}^2\text{جـ} = \text{قا}^2\text{جـ}\,\text{قتا}^2\text{جـ}$

٤ [illegible] $\text{جا}^2\text{س}$ [illegible] $\text{جا}^2\text{س}$

٥ [illegible] $\text{جا}^2\text{س}$

٦ [illegible] $\text{جا}\,\text{س}$ [illegible] $\text{جا}\,\text{س}$

٧ [illegible] جا^2 [illegible]

٨ [illegible] جا^2 [illegible] جا^2

٩ $\dfrac{\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}\,\text{س} + \text{جتا}\,\text{س}} + \dfrac{\text{جا}^2\text{س}\,\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س}} = 2$

١٠ $\text{ظا}^2\text{جـ}\,\text{ظتا}^2\text{جـ} - \dfrac{\text{جا}^2\text{جـ}\,\text{جتا}^2\text{جـ}}{\text{جا}^2\text{جـ}\,\text{جتا}^2\text{جـ}}$

١١ ظا أ = و أ ، قا أ = ١ − جا² أ

درس ٢ حل المعادلات المثلثية

• مثال (١) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : جا س = $\frac{1}{2}$ حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحل

∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{1}{2}$ هى ٣٠°

∵ الجيب موجب ∴ الزاوية س تقع فى الربع الأول أو الربع الثانى .

∴ س = ٣٠° أ ، س = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠° حيث س ∈]٠ ، ٣٦٠°[

∴ م . ح = {$\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$}

• الحل العام : نضيف لكل ناتج ٢نπ حيث ن ∈ ص

∴ مجموعة الحل العام : {$\frac{\pi}{6}$ + ٢نπ ، $\frac{5\pi}{6}$ + ٢نπ }

• مثال (٢) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : جتا θ = $\frac{1}{2}$ فى ٠ < θ < ٢π ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحـل

الزاويه لحدة التي جيب تمامها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ هي $45° = \frac{\pi}{4}$

∴ جتا (موجبة) ∴ الزاويه تقع في الربع الأول أو الرابع .

$\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $\theta = 360°$ ، $\frac{7}{4}\pi = 315° = 45°$

∴ م . ح = $\{\frac{\pi}{4} ، \frac{7\pi}{4}\}$

• **ملحوظة هامة :** $315°$ تكافئ $-45°$ ∴ م . ح = $\{\frac{\pi}{4} ، -\frac{\pi}{4}\}$

• **الحل العام :** نضيف لكل ناتج $2\pi ن$

∴ مجموعه الحل العام : $\{\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi ن\}$ حيث ن ∈ ص

• **ملحوظة .** الحل العام يمكن أن يكون : $\frac{\pi}{4} + 2\pi ن$ أو $\frac{7}{4}\pi + 2\pi ن$

• مثال (٢) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : طا θ = $\sqrt{3}$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$ ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحـل

θ = طا$^{-1}$ $\sqrt{3}$ ∴ $\frac{\pi}{3} = \theta$. ∵ طا (موجبة) في الربع الأول والثالث .

∴ م . ح في $[0 ، 2\pi]$ هي $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi$

• **الحل العام :** نضيف للناتج الأول فقط $\pi ن$ وهي مع الطا ، طتا

∴ الحل العام : $\frac{\pi}{3} + \pi ن$

• مثال (٤) : أوجد مجموعة حل المعادله : طا θ = ٢جا θ حيث θ ∈ $[0 ، 360°]$

الحـل

∴ $\frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta}$ = ٢جا θ ∴ جا θ = ٢جا θ جتا θ

جا θ − ٢جا θ جتا θ = ٠ ∴ جا θ(١ − ٢جتا θ) = ٠

∴ جا θ = ٠ أو جتا θ = $\frac{1}{2}$

∴ عندما جا θ = ٠ ∴ θ = ٠ أو ١٨٠° ، ٣٦٠°

عندما جتا θ = $\frac{1}{2}$ ∴ θ = ٦٠° ، ٣٠٠°

∴ م . ح = {٠ ، ٦٠° ، ١٨٠° ، ٣٠٠° ، ٣٦٠°}

• مثال (٥) : حل المعادله : قا θ − ٢جا θ = ١ حيث θ ∈ $[0 ، 360°]$

الحـل

قا θ = $\frac{1}{\text{جا } \theta}$ ∴ $\frac{1}{\text{جا } \theta}$ − ٢جا θ = ١

∴ ١ − ٢جا^2 θ = جا θ ∴ ٢جا^2 θ + جا θ − ١ = ٠

∴ (٢جا θ − ١)(جا θ + ١) = ٠

∴ ٢جا θ − ١ = ٠ أو جا θ = −١

جا θ = $\frac{1}{2}$ | θ = ١٨٠°

∴ θ = ٦٠° ، ٣٠٠°

∴ م . ح = {٦٠° ، ١٨٠° ، ٣٠٠°}

تمرين (٢) : على حل المعادلات المثلثية

• مجموعة (أ) :

• أوجد مجموعة حل المعادلات التالية : حيث صفر° ≤ س ≤ ٣٦٠°

1. جا س = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (٤٥° ، ١٣٥°)
2. جتا س = $\frac{1}{2}$ (١٢٠° ، ٢٤٠°)
3. طا^2 س = ٣ (٦٠° ، ١٢٠° ، ٢٤٠° ، ٣٠٠°)
4. جا س = جتا س (٤٥° ، ٢٢٥°)
5. ٢جا س = طا س (٠° ، ١٨٠° ، ٦٠° ، ٣٠٠°)
6. ٢جتا س − قتا س = ١ (٢١٠° ، ٣٣٠° ، ٩٠°)
7. جا^2 س − ٢جا س + $\frac{1}{4}$ = ٠ (٦٠° ، ٣٠٠°)
8. ٢جتا س − ٤جتا س = صفر (٦٣° ٢٦َ ، ٢٤٣° ٢٦َ)
9. ٢جتا^2 س − ٥جتا س + ٣ (١٢٠° ، ٢٤٠°)
10. جا س = ٢ (ليس لها حل)
11. ظا س = −١
12. جا^2 θ − جتا^2 θ = $\frac{1}{2}$
13. ٥ ظتا^2 θ − ٦ قتا θ = ٣

• **مجموعة (ب)** • اوجد الحل العام لكل من من المعادلات التالية :

1. ظا θ = ١
2. ٢ حتا θ = ١
3. ٢ حتا θ − √٣ = ٠
4. حتا² θ − حتا θ = ٠
5. √٢ حا θ حتا θ − حا θ = ٠
6. √٣/٢ = حا θ
7. ظا θ = √٣/٢
8. حتا θ = حا ٢θ
9. ٢ حا² θ − حا θ = ٠

درس ٣ حل المثلث القائم الزاوية

• للمثلث ٦ عناصر هى ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا ويتعين عناصر أى Δ إذا علم قياسات أية ثلاث منها على أن يكون أحداها ضلعًا على الأقل .

• معنى حل Δ هو إيجاد قياسات العناصر غير المعلومة فيه .

• قاعدة عامة : فى Δ القائم الزاوية

$$\frac{\text{طول الضلع لمطلوب}}{\text{طول الضلع المعلوم}} = \text{دالة مثلثية لزاوية حادة فى } \Delta$$

• مثال (١) :

حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى جـ حيث :

ق(∠أ) = ٥٦° ١٢′ ، أ ب = ٥٠ سم

الحل

ق(∠ب) = ٩٠° − ٥٦° ١٢′ = ٣٣° ٤٨′

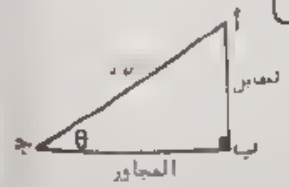
(90 − 56 »» 12 »» = 33° 48′)

ب جـ / أ ب = حا أ ∴ ب جـ = أ ب حا أ = ٥٠ × حا ١٢′ ٥٦° ≃ ٤١,٥ سم

(50 × sin 56 »» 12 »» = 41.5)

∴ أ جـ / أ ب = حتا أ

∴ أ جـ = أ ب حتا أ = ٥٠ حتا ١٢′ ٥٦° ≃ ٢٧,٨ سم



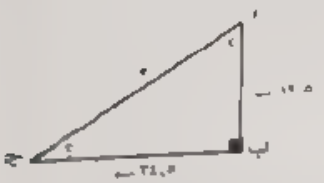
• تذكر أن :

ظا θ = المقابل / المجاور ، حا θ = المقابل / الوتر ، حتا θ = المجاور / الوتر

• مثال (٢) : حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب

حيث أ ب = ١٢,٥ سم ، ب جـ = ٢٤,٥ سم

الحل



١٢,٥ / ٢٤,٥ = ظا جـ

باستخدام الآلة الحاسبة نحصل على جـ

(12.5 ÷ 24.5 = SHIFT Tan (Ans) = 27° 1′ 51.1″)

ق(∠جـ) = ٢٧° ١′ ٥١″

ق(∠أ) = ٩٠° − ق(∠جـ) = ٩٠° − ٢٧° ١′ ٥١″ = ٦٢° ٥٨′ ٩″

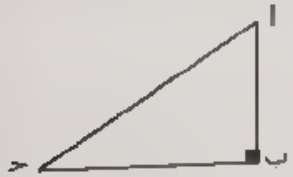
حا جـ = ١٢,٥ / أ جـ ⇐ أ جـ = ١٢,٥ / حا جـ

لعملية على الآلة :

(12.5 ÷ sin 27° 1′ 51″ = 27.5)

أو أ جـ = √((١٢,٥)² + (٢٤,٥)²) ≃ ٢٧,٥ سم

• **ملحوظة هامة :** إذا علم طولى ضلعين فى Δ قائم الزاوية فيمكن إيجاد طول الضلع الثالث باستخدام فيثاغورث :



(أ جـ)² = (أ ب)² + (ب جـ)²

(أ ب)² = (أ جـ)² − (ب جـ)²

(ب جـ)² = (أ جـ)² − (أ ب)²

تمرين (٢) : على حل المثلث القائم

١ حل Δ أ ب جـ القائم الزاوية في ب ، إذا كان : أ جـ = ٢٥ سم ، ق(جـ) = ٥٣°

٢ حل Δ أ ب جـ القائم الزاوية في ب ، إذا كان : أ جـ = ٢٠ سم ، ب جـ = ١٣ سم .

٣ حل Δ س ص ع القائم الزاوية في ص ، إذا كان : س ص = ١٥ سم ، ق(ع) = ٣٧° ٢٤َ

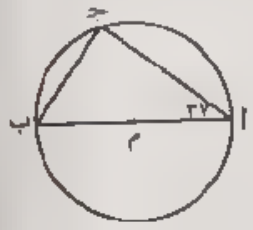
٤ حل Δ أ ب جـ القائم الزاوية في جـ ، إذا كان . أ جـ = ١٨ سم ، ب جـ = ٢٥ سم .

٥ أ ب جـ Δ رسم $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ يقطعه في ء ، وكان : أ ء = ٣ سم ، أ ب = ٤ سم ، أ جـ = ٥ سم ، فأوجد قياس كل زوايا المثلث

٦ أ ب جـ Δ فيه : ق(أ) = ١٠٠° ، ق(ب) = ٣٠° ، رسم $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ قطعه في ء فإذا كان : أ ء = ١٢ سم ، فأوجد أطوال أضلاع Δ أ ب جـ

٧ Δ متساوي الساقين طول ارتفاعه ١٠ سم ، قياس زاوية رأسه ٤٢° أوجد طول قاعدته .

٨ في الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، $\overline{أ ب}$ قطر فيها :

فإذا كان أ جـ = ١٢ سم ، ق(أ) = ٣٧°

فأوجد طول نصف قطر الدائرة لأقرب رقمين عشريين .

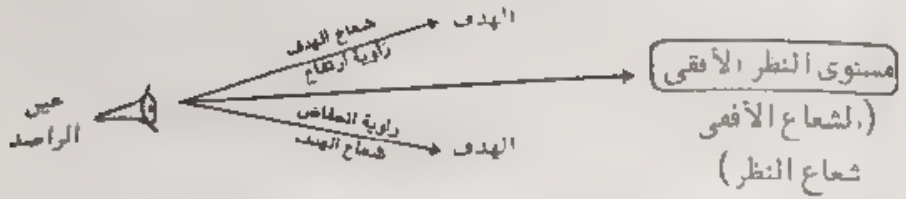
٩ Δ س ص ع فيه : س ص = ١١,٥ سم ، ص ع = ٢٧,٦ سم ، س ع = ٢٩,٩ سم ، أثبت أن المثلث قائم الزاوية في ص ثم أوجد قياس (س)

١٠ دائرة طول نصف قطرها ٦ سم ، رسم فيها وتر يقابل زاوية مركزية قياسها ١٠٨° ، احسب طول هذا الوتر مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين

١١ أ ب جـ ء شبه منحرف متساوي الساقين فيه : $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أ ب = جـ ء = ٥ سم ، أ ء = ٤ سم ، ب جـ = ١٠ سم ، أوجد قياس كل من ق(أ) ، ق(ب)

درس ٤

زوايا الارتفاع والانخفاض

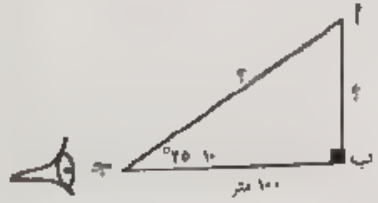


- الشخص الذي ينظر إلى أسفل على هدف ما يرسم زاوية انخفاض أما إذا نظر إلى أعلى على هدف ما فهو يرسم زاوية ارتفاع .
- قياس زاوية الارتفاع = قياس زاوية الانخفاض المرسومتان بين عين الراصد والهدف لأنها قياسا زاويتين متبادلتين .
- الشعاع الأفقي وشعاع الهدف يقعان في مستوى واحد .
- في جميع المسائل يهمل طول الشخص إلا إذا نص في المسألة على غير ذلك

• مثال (١) :

رصد رجل قمة برج من نقطة تبعد عن قاعدته ١٠٠ م فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمته ٢٥° ١٠َ ، أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر .

الحل



المطلوب إيجاد ارتفاع البرج أ ب

∵ طا جـ = $\frac{أ ب}{ب جـ}$

∴ أ ب = ب جـ طا جـ = ١٠٠ طا ٢٥° ١٠َ ≃ ٤٧ م

• مثال (٢) :

من قمة فنار ارتفاعه ٣٠٠ م فوق سطح البحر رصد شخص سفينة وكان قياس زاوية انخفاضها ٤٠° ٦َ ، فما بعد السفينة عن الفنار ؟

الحل

نعتبر أن (أ ب) هو طول الفنار و المطلوب إيجاد بعد السفينة عن الفنار يعني إيجاد

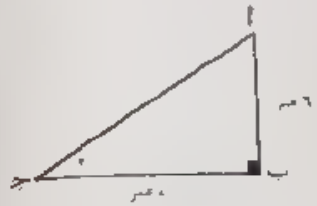
طول (ب جـ)

ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ ظا ٤٠° ٦َ = $\frac{٣٠٠}{\text{ب جـ}}$

∴ ب جـ = $\frac{٣٠٠}{\text{ظا ٤٠° ٦َ}}$ ≃ ٣٥٦ م

• مثال (٢) :

مندنة ارتفاعها ٦٠ م ، أوجد قياس زاوية ارتفاع قمتها من نقطة على بعد ٤٠ م منها وتقع في المستوى الأفقي المار بقاعدتها .



الحل

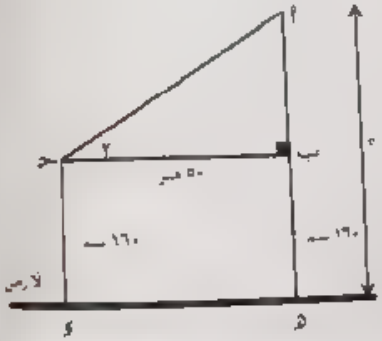
ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ ظا جـ = $\frac{٦٠}{٤٠}$ = $\frac{٣}{٢}$

ق(∠جـ) ≃ ٥٦° ١٩َ

• مثال (٤) :

رجل طوله ١٦٠ سم يقف على بعد ٥٠ م من قاعدة عمود رأسي ورصد قمة العمود فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ٢٠° ، أوجد ارتفاع العمود عن سطح الأرض لأقرب متر .

الحل



ارتفاع العمود = أ ب + ب د

= أ ب + ١,٦ م

في △ أ ب جـ ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

∴ أ ب = ب جـ ظا جـ = ٥٠ ظا ٢٠° ≃ ١٨,٢ م

∴ طول العمود = ١٨,٢ + ١,٦ = ١٩,٨ ≃ ٢٠ م

تمرين (٤) : على زوايا الارتفاع والانخفاض

١ من نقطة على سطح الأرض على بعد ٥٠ م من قاعدة برج وجد أن قياس زاوية ارتفاع البرج ٥٨° ٢٤َ ، أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر .

٢ من قمة صخرة ارتفاعها ١٠٠ م عن سطح البحر وجد أن قياس زاوية انخفاض سفينة ١٤° ٢٥َ ، أوجد بعد السفينة عن قاعدة الصخرة .

٣ مئذنة ارتفاعها ٤٥ م ، أوجد قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فيها من نقطة في المستوى الأفقي المار بقاعدتها وتبعد عنها ٣٨ م .

٤ رجل طوله ١٧٠ سم يقف على بعد ٨٠ م من قاعدة برج فكان قياس زاوية ارتفاع قمته ٧٤° ٣٨َ ، أوجد ارتفاع البرج عن سطح الأرض لأقرب م

٥ قاس راصد زاوية ارتفاع منطاد ثابت فوجدها ٥٢° ٢٥َ ولما سار نحو المنطاد في خط مستقيم ٥٠٠ م وجد أن زاوية ارتفاعه أصبحت ٦٨° ٢٨َ ، أوجد ارتفاع المنطاد

٦ رصد شخص واقف على سطح الأرض طائرة على ارتفاع ٨٠٠ م عن سطح الأرض ، فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ٢٥° ١٧َ ، أوجد المسافة بين الشخص والطائرة لأقرب م .

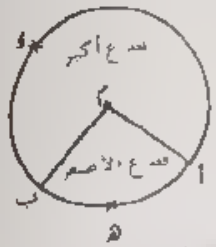
٧ من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ م من سطح الأرض قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٠٠ م عن قاعدة الصخرة ، فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان .

٨ وقف شخص على صخرة ارتفاعها ٥٠ م ولاحظ سفينتين في البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة وقاس زاويتي انخفاضيهما فوجدهما ٣٨° ، ٥٥° ، أوجد البُعد بين السفينتين لأقرب متر .

٩ عمود إنارة طوله ٩,٤ متر يلقي ظلا على الأرض طوله ٥,٦ متر ، أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ .

١٠ تقترب سفينة من منارة ارتفاعها ٥٠ م رصدت قمة المنارة في لحظة ما فوجدت أن قياس زاوية انخفاضها ٠,١١° وبعد ١٥ دقيقة رصدت قمة المنارة ثانيًا فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها فوجدت ٠,٢٢° ، احسب سرعة السفينة علمًا بأنها تسير بسرعة منتظمة .

درس ٥ القطاع الدائرى والقطعة الدائرية

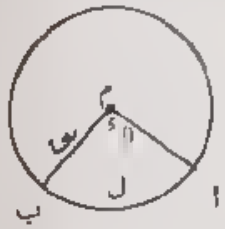


• تعريف : القطاع الدائرى

هو جزء من سطح دائرة محدود بقوس من الدائرة ونصفى القطرين المارين بطرفى هذا القوس فى الرسم

م أ هـ ب القطاع الأصغر . (أ م ب) تسمى بزاوية القطاع الأصغر

م أ ء ب قطاع أكبر وتسمى (أ م ب) المنعكسة بزاوية القطاع الأكبر .



• القوانين لمساحة القطاع الدائرى :

من الرسم المقابل ، إذا كان :

ل = طول قوس القطاع الأصغر

ن = طول نصف قطر دائرة القطاع

θ° = القياس الدائرى لزاوية القطاع

س° = القياس الستينى لزاوية القطاع

• مساحة القطاع الدائرى :

= $\frac{1}{2}$ ل ن = $\frac{1}{2}$ θ° ن^2 بمعلومية ل ، ن

= $\frac{\theta^{\circ}}{2\pi}$ × مساحة سطح الدائرة

بمعلومية القياس الدائرى

= $\frac{س^{\circ}}{360}$ × مساحة سطح الدائرة

بمعلومية القياس الستينى

قواعد مساعدة

مساحة الدائرة = ط ن^2

محيط الدائرة = ٢ط ن

ل = θ° ن

$\theta^{\circ} = \frac{س^{\circ} \times ط}{180}$

$س^{\circ} = \frac{\theta^{\circ} \times 180}{ط}$

محيط القطاع = ٢ن + ل

• مثال (١) :

أوجد مساحة قطاع دائرى قياس زاويته ٦٠° وطول نصف قطر دائرته ٥ سم .

الحل

مساحة القطاع = $\frac{س^{\circ}}{360}$ × مساحة سطح الدائرة = $\frac{60^{\circ}}{360^{\circ}}$ × ط × ٢٥ = ١٣,٠٩ سم^2

• مثال (٢) :

قطاع دائرى مساحته ٦ سم^2 ومحيطه ١٤ سم ، أوجد نصف قطر القطاع وطول القوس ؟

الحل

المساحة = $\frac{1}{2}$ ل ن .. ٦ = $\frac{1}{2}$ ل ن ∴ ل ن = ١٢ . (١)

المحيط = ٢ن + ل = ١٤ . ل = ١٤ − ٢ن عوض فى (١)

ن(١٤ − ٢ن) = ١٢ ⇐ ١٤ن − ٢ن^2 = ١٢

٢ن^2 − ١٤ن + ١٢ = صفر بالقسمة على ٢

ن^2 − ٧ن + ٦ = ٠ ⇐ (ن − ٦)(ن − ١) = ٠

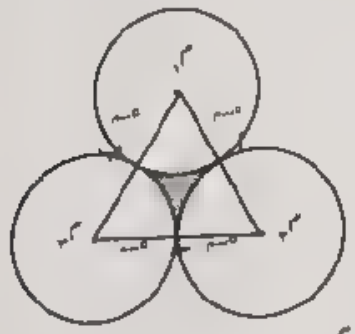
.. ن = ٦ ، ن = ١

عندما ن = ٦ ، ل = ٢ ، عندما ن = ١ ، ل = ١٢

• مثال (٣) :

ثلاث دوائر طول نصف قطر كل منها ٥ سم ومراكزها هى رؤوس لمثلث متساوى الأضلاع وطول ضلعه ١٠ سم ، أوجد مساحة السطح المحصور بين هذه الدوائر .

الحل



من هندسة الشكل القطاعات :

م١ أ ب ، م٢ أ جـ ، م٣ ب جـ

متساوية فى المساحة

∴ مساحة الجزء المظلل =

مساحة المثلث م١ م٢ م٣ − ٣ مساحة أى قطاع دائرى

= $\frac{1}{2}$ م١ م٢ × م٢ م٣ جا ٦٠° − ٣ × $\frac{60^{\circ}}{360^{\circ}}$ × ط ن^2

= $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ١٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ − ٣ × $\frac{1}{6}$ × ط × ٢٥

= ٤٣,٣٠١٢٧ − ٣٩,٢٦٩٩١ = ٤,٠٣ ≃ ٤ سم^2

ملحوظة

مساحة أى مثلث تساوى نصف حاصل ضرب أى ضلعين فى جا الزاوية بينهما .

تمرين (٥) : على القطاع الدائرى (من امتحانات الأزهر)

١ أوجد مساحة قطاع دائرى طول قوسه ٦ سم ، وطول قطر دائرته ٨ سم .

٢ قطاع دائرى مساحته ٣٦ سم^{٢} ، طول قوسه ٤,٥ سم
(١) أوجد طول نصف القطر .
(٢) أوجد القياس الدائرى والستينى لزاويته .

٣ قطاع دائرى مساحته ٣٠ سم^{٢} ، قياس زاويته الدائرى ٠,٦ ^{د} ، أحسب طول نصف قطر دائرته وطول قوسه .

٤ قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ٢٠ سم ومساحة سطحه ٢٠٠ سم^{٢} ، أوجد طول قوس القطاع وقياس زاويته بكل من التقديرين الستينى والدائرى .

٥ قطاع دائرى مساحته ٤ سم^{٢} ومحيطه ٨ سم ، أحسب طول نصف قطر دائرته وقياس زاويته المركزية بالقياسين الدائرى والستينى .

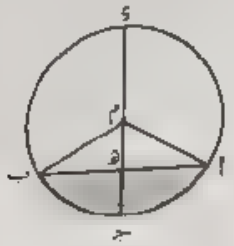
٦ دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم فيها وتر $\overline{أب}$ طوله ١٢ سم ، أحسب مساحة القطاع الدائرى $\widehat{م أ ب}$ الأصغر .

٧ قطاع دائرى محيطه ٦٤ سم وطول نصف قطر دائرته ٢١ سم ، أوجد باستخدام الحاسبة قياس زاويته المركزية بالدرجات ومساحة سطحه .

٨ قطاع دائرى مساحة سطحه ٤٨ سم^{٢} وطول قوسه ١٦ سم ، أوجد محيط القطاع وقياس زاويته المركزية بالتقديرين الستينى والدائرى .

٩ أ نقطة خارج دائرة مركزها م رسم لمماس $\overline{أب}$ يمسها فى ب بحيث كان أب = ١٣,٢ سم وقطع $\overline{أم}$ قطعة محيط الدائرة فى ء وكان ق(ب أ م) = ١٣ ٣١ أوجد مساحة المحصورة بين القوس الأصغر $\widehat{ب ء}$ والقطعتين $\overline{أب}$ ، $\overline{أء}$

• تعريف القطعة الدائرية



هو جزء من سطح دائرة محدودة بقوس فيها ووتر مار بنهايتى ذلك القوس .

فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{ءجـ}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، فإن أ جـ ب قطعة دائرية

، أ م ب هى زاوية القطعة ، $\overline{مجـ}$ نصف قطر

، $\overline{هجـ}$ ارتفاع لقطعة لدائرته .

تذكر أن :
مساحة سطح المثلث = نصف حاصل ضرب طولى أى ضلعين فيه × جتا الزاوية بينهما

قانون مساحة القطعة الدائرية

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{د}$ − جتا θ)

حيث هـ هى الزاوية المركزية (زاوية القطعة) ، $\theta^{د}$ القياس الدائرى لزاوية القطعة .

• مثال (٤) :

أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٥ سم وقياس زاويتها ١٠٠°

الحل

$\frac{س°}{١٨٠} = \frac{\theta^{د}}{ط}$ ∴ $\theta^{د} = \frac{١٠٠° \times ط}{١٨٠°} = ١,٧٤٥^{د}$ ، جتا θ = جتا ١٠٠° = ٠,٩٨٤٨

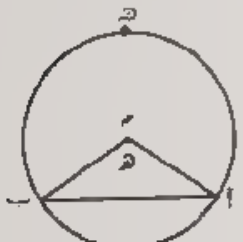
مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{د}$ − جتا θ)

= $\frac{١}{٢} \times ٢٥$ (١,٧٤٥ − ٠,٩٨٤٨) = ٩,٥ سم^{٢}

• مثال (٥) :

دائرة م طول قطرها ١٦ سم ، أ ، ب نقطتان على الدائرة فإن كان طول القوس الأصغر $\widehat{أب}$ يساوى ١٢ سم ، أوجد لأقرب سم^{٢} مساحة القطعة الكبرى التى وترها $\overline{أب}$

الحل



∵ $\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}^{د}$

∴ س° = $\theta^{د} \times \frac{١٨٠}{ط} = \frac{٣}{٢} \times \frac{١٨٠}{ط}$

= ٨٥° ٥٦′ ٣٧″

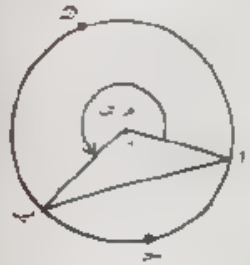
جـ θ = ٠,٩٩٧٥

مساحة قطعة = مساحة ا جـ ب = $\frac{1}{2}$ نق^2 (θ$^{\circ}$ − جـ θ)

= $\frac{1}{2}$ × ٦٤ (٣,١٤ − ٠,٩٩٧٥) = ١٢,٠٨ سم^2

مساحة القطعة الكبرى ا د ب = مساحة الدائرة − مساحة القطعة ا جـ ب

= ٣,١٤ × ٦٤ − ١٢,٠٨ = ١٨٤,٩٨٢ سم^2



طول القوس = $\frac{\text{ق}}{\text{نق}}$ = $\frac{١٢}{٨}$ = $\frac{٣}{٢}$ ط

د = ٢ط − ١,٥ = ٤,٧٨٣١٩

ى = ٢٧٤,٣ ∴ جـ ى = −٠,٩٩٧٥

مساحة القطعة الكبرى ا د ب = $\frac{1}{2}$ نق^2 (ى$^{\circ}$ − جـ ى)

= $\frac{1}{2}$ × ٦٤ (٤,٧٨٣١٩ + ٠,٩٩٧٥) = ١٨٤,٩٨٢ سم^2

مثال (٦١):

ترسم دائرتان طول نصف قطر كل منها ٤ سم وتمر إحداهما بمركز الأخرى، أوجد مساحة القطعة المشتركة بينهما.

الحل

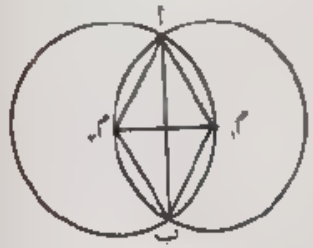
نصل ا م$_1$ م$_2$ متساوي الأضلاع حيث ا م$_1$ = ا م$_2$ = م$_1$ م$_2$

∴ ق(∠ ا م$_1$ ب) = ١٢٠° ، ق(∠ ا م$_2$ ب) = ١٢٠°

∵ أنصاف الأقطار متساوية ∴ مساحة كلا من القطعتين الدائرتين متساويتين

θ$^{\circ}$ = ١٢٠° × $\frac{\text{ط}}{١٨٠}$

= $\left(\frac{٢\text{ط}}{٣}\right)$



∴ جا θ = جا ١٢٠° = ٠,٨٦٦

مساحة القطعة ا م$_1$ ب = $\frac{1}{2}$ نق^2 (θ$^{\circ}$ − جا θ)

= $\frac{1}{2}$ × ١٦ ($\frac{٢\text{ط}}{٣}$ − ٠,٨٦٦) = ٩,٨٣ سم^2

مساحة القطعتين = ١٩,٦٦ سم^2 = مساحة المنطقة المشتركة بينهما.

تمرين (١١) على القطعة الدائرية (من امتحانات الأزهر)

١ أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطرها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ١٢٠° مقرب الجواب لأقرب سم^2.

٢ أوجد لأقرب سم^2 مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ١٦ سم وطول قوسها ٢,٣ ط.

٣ أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التي طول نصف قطر دائرتها ١٦ سم وطول قوسها ٢٤ سم مقرب الجواب لأقرب رقم عشري.

٤ أوجد مساحة القطعة الدائرية التي نصف قطر دائرتها ١٠ سم وارتفاعها ٥ سم.

٥ دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ١٠ سم، رسم الوتر $\overline{\text{ا ب}}$ في الدائرة بحيث كان بعده عن مركز الدائرة يساوي ٥ سم، أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التي وترها القطعة المستقيمة $\overline{\text{ا ب}}$.

٦ Δ ا ب جـ متساوي الأضلاع مرسوم داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سم، أوجد مساحة القطعة التي قوسها $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$ لأقرب سم^2.

٧ $\overline{\text{ا ب}}$ قطر في الدائرة م، جـ ∈ الدائرة م وكان ا جـ = ٦ سم، ب جـ = ٨ سم، أوجد مساحة القطعة الصغرى التي وترها $\overline{\text{ا جـ}}$.

٨ دائرة طول نصف قطرها ١٤ سم، ا، ب نقطتان على الدائرة تحصران قوس أصغر طوله ٢١ سم، أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة القطعة الدائرية الصغرى التي وترها $\overline{\text{ا ب}}$.

٩ دائرتان طولا نصفي قطريهما ٦ سم، ٨ سم والبعد بين مركزيهما ١٠ سم، أوجد المساحة المشتركة بين الدائرتين لأقرب سم^2.

درس ٦ المساحات

• **مساحة المثلث** = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

• مثال (١) : أوجد مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه ب جـ = ١٦ سم ، ب أ = ٢٢ سم ، ق(∠ب) = ٦٣° ، مقربًا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .

الحل

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ٢٢ × ١٦ حا ٦٣° ≃ ١٥٦,٨١٧ سم^2

• مساحة الشكل الرباعى بدلالة قطريه :

مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

• مثال (٢) : أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٣٢ سم ، ٤٦ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٢° لأقرب سم^2 .

الحل

مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ × ٣٢ × ٤٦ حا ١٢٢° ≃ ٦٢٤ سم^2

• مساحة المضلع المنتظم :

مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$

• مثال (٣) : أوجد مساحة الشكل الخماسى المنتظم الذى طول ضلعه ١٦ سم مقربًا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .

الحل

مساحة الشكل الخماسى المنتظم = $\frac{1}{4}$ × ٥ × (١٦)^2 × ظتا $\frac{\pi}{5}$

= $\frac{1}{4}$ × ٥ × (١٦)^2 × $\frac{1}{ظا ٣٦°}$ ≃ ٤٤٠,٤٤٢ سم^2

• **ملحوظة** : الشكل المنتظم يسمى مسدس ، مسبع ، مثمن للدلالة على أنه منتظم .
فمثلا الشكل الخماسى المنتظم يسمى ذلك (مخمس) .

تمرين (٧) : على المساحات

١ أوجد مساحة المثلث س ص ع حيث س ص = ١٨ سم ، ص ع = ١٢ سم ، ق(∠ص) = ٣١° لأقرب رقم عشرى

٢ أوجد مساحة المثلث أ ب جـ فيه : ب جـ = ٢٥ سم ، أ جـ = ١٩ سم ، ق(∠جـ) = ٥٦° لأقرب سم^2

٣ أوجد مساحة المثلث أ ب جـ حيث أ ب = ٢٠ سم ، ب جـ = ٢٤ سم ، ق(∠ب) = ١١٠° لأقرب سم^2 .

٤ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٥ سم ، ١٨ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٧٧° لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .

٥ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٣٠ سم ، ٢١ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٥٥° لأقرب سم^2 .

٦ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٤٠ سم ، ٣٥ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٥° لأقرب سم^2

٧ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٣٢ سم ، ٢٨ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ١١٠° لأقرب سم^2

٨ أوجد مساحة المسدس الذى طول ضلعه ١٥ سم (مسدس = شكل سداسى منتظم)

٩ أوجد مساحة المسبع الذى طول ضلعه ٢٤ سم

١٠ أوجد مساحة المثمن الذى طول ضلعه ١٢ سم .

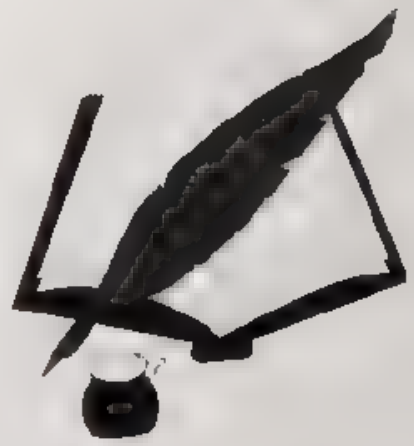
١١ أوجد مساحة المعين الذى طول ضلعه ٨ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين فيه تساوى ٥٨° .

١٢ مسدس مساحته ٥٤ $\sqrt{3}$ سم^2 ، أوجد طول ضلعه .

١٣ شبه منحرف مستوى النافس قاعدته الكبرى ٨ م ، وقاعدته الصغرى ٣ م ، ويميل على من سافس على القاعدة الكبرى بزاوية ٧٥° ، أوجد مساحة شبه المنحرف .

ثالثًا

الهندسة التحليلية



درس ١ الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة

• تعاريف اساسية

(١) الكميات القياسية : هى كميات تحدد تماما بمعرفة مقدارها فقط ، مثل الطول والحجم والمساحة

(٢) الكميات المتجهة : هى كميات تحدد تماما بمعرفة مقدارها واتجاهها ، مثل السرعة والقوة

• الفرق بين الإزاحة والمسافة

(١) الإزاحة : كمية قياسية وهى المسافة المقطوعة للجسم فعليًا .

(٢) الإزاحة : كمية متجهة وهى المسافة المقطوعة فى اتجاه معين بين نقطة البداية ونقطة النهاية فقط

• مثال لتوضيح ذلك : كما بالشكل المقابل

إذا تحرك جسم من أ ثم ذهب إلى جـ ثم رجع إلى ب

فإن المسافة المقطوعة = أ جـ + جـ ب = ١٠ + ٤ = ١٤ سم

الإزاحة يهمنا البداية والنهاية فقط = أ ب = ٦ سم

(٣) القطعة المستقيمة :

هى مجموعة جزئية من نقط الخط المستقيم ،

فمثلاً $\overline{\text{أ ب}}$ هى المجموعة التى عناصرها النقطتين أ ، ب

وكل نقط الخط المستقيم المحصورة بين أ ، ب ، نلاحظ أن : $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{ب أ}}$

(٤) القطعة المستقيمة الموجهة : إذا حددنا نقطة البداية والنهاية للقطعة المستقيمة نسمى القطعة المستقيمة الموجهة ورمزها $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

إذًا : القطعة المستقيمة الموجهة تتحدد تمامًا بثلاثة عناصر هى

(١) نقطة البداية . (٢) نقطة النهاية . (٣) الاتجاه من نقطة البداية لنقطة النهاية .

لذا فإن $\overrightarrow{\text{أ ب}} \neq \overrightarrow{\text{ب أ}}$ وتقرأ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ لا تكافئ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

• تعريف القطعة المستقيمة الموجهة : هي ..... نهاية واتجاه

(٥) معيار القطعة المستقيمة الموجهة : معيار $\overrightarrow{أب}$ هو طول $\overline{أب}$ ويرمز له بالرمز $\|\overrightarrow{أب}\|$

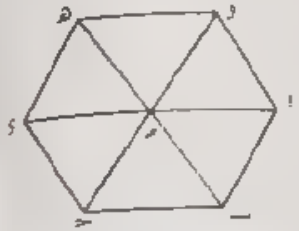
• محوله $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{بأ} = أب$

(٦) تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين : تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان لهما نفس المعيار ونفس الاتجاه .

• مثال (١) : في الشكل المقابل :

أ ب ج د هـ و سداسي منتظم مركزه النقطة (م) ،

برهن أن $\overrightarrow{بأ}$ ، $\overrightarrow{مد}$ ، $\overrightarrow{جد}$



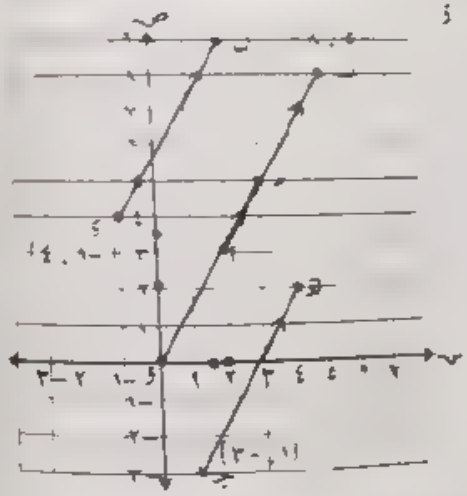
الحل

$\overrightarrow{بأ}$ يكافئ كل من $\overrightarrow{جم}$ ، $\overrightarrow{مو}$ ، $\overrightarrow{دهـ}$

• $\overrightarrow{مو} = \overrightarrow{أم} = \overrightarrow{وهـ} = \overrightarrow{جد}$ (٣) $\overrightarrow{جد} = \overrightarrow{بم} = \overrightarrow{مهـ} = \overrightarrow{أو}$

• مثال (٢) : في مستوى إحداثي عين النقط أ(٢ ، ٣) ، ب(٥ ، ٨) ، جـ(١ ، -٣) ، د(-٤ ، ٩) ثم عين $\overrightarrow{جهـ}$ ، $\overrightarrow{دل}$ ، $\overrightarrow{وم}$ حيث أو النقطة الأصل . بين أيها يكافئ $\overrightarrow{أب}$ مع تحديد إحداثيي كل من النقط م ، هـ ، ل .

الحل

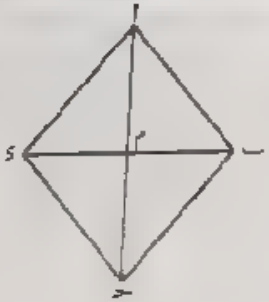


محور الصادات الموجبة ثم سير ٥ خطوات في اتجاه محور الصادات الموجبة

تحديد النقطة هـ = (٤ ، ٢) ، ل = (٩ ، ٣) ، م = (٣ ، ٥) هي نفسها أ ب

تأكد أن كل القطع لها نفس الاتجاه ونفس الطول .

تمرين (١) : الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة



(١) في الشكل المقابل :

أ ب ج د معين فيه :

[أ] $\overrightarrow{أب}$ يكافئ .....

[ب] $\overrightarrow{جد}$ يكافئ .....

[جـ] $\overrightarrow{بم}$ يكافئ

[د] $\overrightarrow{دم}$ يكافئ

(٢) أ ب ج د مربع طول ضلعه ٤ سم : في أ م كتب جميع القطع المستقيمة الموجهة والمتكافئة في هذه الشكل

(٣) في الشكل المقابل .

أ ب ج د مستطيل طول ضلعه ٤ سم : في م

برهن أن $\overrightarrow{دج}$ ، $\overrightarrow{مب} = \overrightarrow{أد}$.

أكمل ما يأتي : الشكل أ م ب د هو شبه منحرف لأن .....

ب الشكل م ب جـ د هو شبه منحرف لأن .....

جـ الشكل م جـ د هو شبه منحرف لأن .....

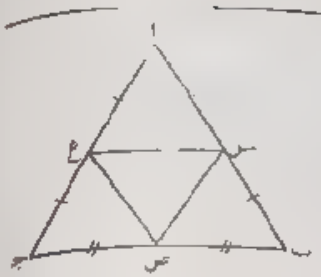
د $\overrightarrow{مب}$ يكافئ ..... ، .....

[هـ] $\overrightarrow{دج}$ يكافئ ..... ، ..... [و] $\overrightarrow{بم}$ يكافئ ..... ، .....

(٤) في مستوى إحداثي معامد عين النقط أ = (٥ ، ٢) ، ب = (٠ ، ٥) ، جـ = (٢ ، ٣) ، د = (-٣ ، -١) ثم عين $\overrightarrow{جهـ}$ ، $\overrightarrow{دل}$ التي تكافئ $\overrightarrow{أب}$ مع إيجاد إحداثيي النقطتين هـ ، ل

(٥) في مستوى إحداثي معامد عين النقط أ(٤ ، -٣) ، ب(٤ ، ٤) ، جـ(-٣ ، -١) وكانت كل من القطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{جد}$ ، $\overrightarrow{وم}$ ، $\overrightarrow{هـو}$ متكافئة

حيث (و) نقطة الأصل ، أوجد إحداثيات كل من ب ، م ، ن



❻ في الشكل المقابل :

أب = أجـ

س ، ص ، ع منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ ، $\overline{جـأ}$

على الترتيب ، أولاً أي العبارات التالية صحيحة

[أ] $\overline{سص} = \overline{عجـ}$ [جـ] $\overline{بص}$ تكافئ $\overline{عس}$

[ب] $\overline{سص}$ تكافئ $\overline{عص}$

ب) كتب القطع التي تكافئ ما يلي إن وجدت :

[أ] $\overline{بس}$ [ب] $\overline{أع}$ [جـ] $\overline{سع}$

[د] $\overline{جص}$ [هـ] $\overline{سص}$ [و] $\overline{عص}$

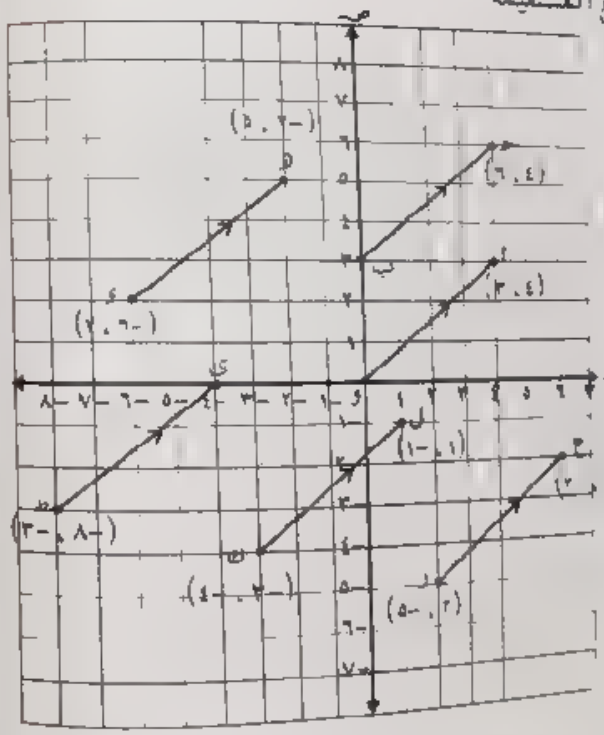
درس ٣ مفهوم المتجه هندسيا وجبريا

في الشكل المقابل : كل القطع المستقيمة موجهة وبها نفس الطول

القطع المستقيمة الموجهة متكافئة

يعني $\overline{وأ} = \overline{بجـ} = \overline{دهـ} = \overline{حز}$

$\overline{حى} = \overline{كل} = \overline{زح}$



• **ملحوظة (١) :**

على سبيل المثال

$\overline{وأ} = \overline{أ} - \overline{و}$

$= (٣ ، ٤) - (٠ ، ٠)$

$= (٣ ، ٤)$

$\overline{نحـ} = \overline{حـ} - \overline{ن}$

$= (١٦ ، ٤) - (٣ ، ١)$

$= (٣ ، ٤)$

$\overline{دهـ} = \overline{هـ} - \overline{د} = (٢ ، ١-) - (٥ ، ٢-) = (٣ ، ٤)$

$\overline{طى} = \overline{ى} - \overline{ط} = (٠ ، ٤-) - (٣- ، ٨) = (٣ ، ٤)$

$\overline{كل} = \overline{ل} - \overline{ك} = (١- ، ١) - (٤- ، ٣-) = (٣ ، ٤)$

$\overline{زح} = \overline{ح} - \overline{ز} = (٢- ، ٦) - (٥- ، ٢) = (٣ ، ٤)$

• **ملحوظة (٢) :** يمكن رسم عدد لا نهائي من القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة المذكورة في الشكل السابق ، و حسن طريقة لإنشاء تلك القطع المتكافئة ، يأتي من أي نقطة نسير ٤ خطوات في اتجاه محور السينات الموجب ثم ٣ خطوات في اتجاه محور الصادات الموجب .

• **ملحوظة (٣) :** القطعة المستقيمة الموجهة الخارجة من نقطة الأصل لها اسم يخصها هو (متجه الموضع) وهو $\overline{وأ}$ في هذه المجموعة .

• **تعريف متجه الموضع لنقطة معلومة بالنسبة لنقطة الأصل :** هي القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة المعلومة .

• **تعريف المتجه هندسيًا :**

مجموعة لا نهائية من القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة التي لها متجه موضع ، ونقطة نهاية متجه الموضع هو الذي يمثل هذه المجموعة في المستوى الإحداثي .

هذا التعريف من معد كتاب المرشد حتى يتضح المفهوم

من هذا التعريف نستنتج أن كل متجه يمثل بنقطة وحيدة في المستوى الإحداثي .

حتى نعرّف مفهوم المتجه جبريًا ، وهو المذكور في كتاب الوزارة .

• **تمهيد (١) :** ∵ ح × ح = {(س ، ص) : س ∈ ح ، ص ∈ ح}

، ح × ح هي $ح^٢$ وتقرأ $ح^٢$ اثنان

• **تعريف (١) :** لكل $(س_١ ، ص_١) ∈ ح^٢$ ، $(س_٢ ، ص_٢) ∈ ح^٢$ يعرف مجموعهما

$(س_١ ، ص_١) + (س_٢ ، ص_٢) = (س_١ + س_٢ ، ص_١ + ص_٢) ∈ ح^٢$

• **تعريف (٢) :** لكل $(س ، ص) ∈ ح^٢$ ولكل $ك ∈ ح^*$

يعرّف $ك(س ، ص) = (كس ، كص) ∈ ح^٢$

∴ بسبب التقابل بين نقط المستوى وهي المجموعة $ح^٢$ ونقط متجهات الموضع تم بناء نظام رياضي لتعريف المتجه جبريًا .

• **تعريف المتجه جبريا :** عناصر المجموعة $ح^2$ مع عمليتى الجمع والضرب فى عدد حقيقى لمعرفتين عليها تسمى متجهات

من تعريف كل منهما فى المستوى لإحداثى المتعامد نمثل متجه

• **تنبيهات :** (١) $\overrightarrow{أب} \subset \overrightarrow{أب}$

(٢) عندما يقول $\overrightarrow{س ص} = \overrightarrow{ع ل}$ يعنى س ص = ع ل ، $\overline{س ص} \parallel \overline{ع ل}$

(٣) نسمى كل القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة بالمتجه وأى من هذه القطع يعتبر

يمثل هندسى لهذا المتجه .

(٤) إذا كان $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{ب} \Leftarrow \overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$

ولهما نفس الاتجاه ، وطول $\overrightarrow{أ}$ ضعف طول $\overrightarrow{ب}$

(٥) إذا كان $\overrightarrow{أ} = -٢\overrightarrow{ب} \Leftarrow \overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$

واتجاههما مضاد ، وطول $\overrightarrow{أ}$ ضعف طول $\overrightarrow{ب}$

• **خواص عمليتى الضرب والجمع**

تحقق فى عملية الجمع الخواص التالية : (أ) خاصية الانغلاق (ب) الإبدال

(ج) التجميع أو الدمج . (د) خاصية وجود العناصر المحايد وهو و = (٠ ، ٠)

(و) خاصية توافر المعكوسات . (و) خاصية الحذف .

وتحقق فى عملية ضرب متجه فى عدد حقيقى : الخواص التالية .

(أ) **خاصية التوزيع :** إذا كان أ ، ب ∈ $ح^2$ ، $ك_1$ ، $ك_2$ ∈ ح

فإن (١) $ك_1(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) = ك_1\overrightarrow{أ} + ك_1\overrightarrow{ب}$

(٢) $(ك_1 + ك_2)\overrightarrow{أ} = ك_1\overrightarrow{أ} + ك_2\overrightarrow{ب}$

(ب) **خاصية التجميع :** لكل $\overrightarrow{أ} \in ح^2$ ، لكل $ك_1$ ، $ك_2$ ∈ ح

يكون $(ك_1 ك_2)\overrightarrow{أ} = ك_1(ك_2\overrightarrow{أ})$

(ج) **خاصية الحذف :** إذا كان $ك\overrightarrow{أ} = ك\overrightarrow{ب}$ فإن $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ والعكس صحيح .

• **مفهوم التساوى :** إذا كان $\overrightarrow{هـ} = (س_1 ، ص_1)$ ، $\overrightarrow{ه} = (س_2 ، ص_2)$

إذا كان $س_1 = س_2$ ، $ص_1 = ص_2$ فإن $\overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{ه}$ والعكس صحيح

• **مثال (١) :** إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٣ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ج} = (-١ ، ٧)$

أوجد $٥\overrightarrow{أ}$ ، $-\overrightarrow{ب}$ ، $\frac{٢}{٣}\overrightarrow{ج}$ ، $٢\overrightarrow{أ} + ٣\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ج}$

ثانيا : ع ص ج بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

الحل

أولا $٥\overrightarrow{أ} = ٥(٣ ، ٥) = (١٥ ، ٢٥)$ ، $-\overrightarrow{ب} = -(-٢ ، ١) = (٢ ، -١)$

، $\frac{٢}{٣}\overrightarrow{ج} = \frac{٢}{٣}(-١ ، ٧) = (-\frac{٢}{٣} ، \frac{١٤}{٣})$

$٢\overrightarrow{أ} + ٣\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ج} = ٢(٣ ، ٥) + ٣(-٢ ، ١) - (-١ ، ٧)$

$= (٦ ، ١٠) + (-٦ ، ٣) + (١ ، -٧) = (١ ، ٦)$

ثانيًا : بفرض أن م ، هـ ∈ ح وبفرض أن $\overrightarrow{ج} = م\overrightarrow{أ} + هـ\overrightarrow{ب}$

$\therefore (-١ ، ٧) = م(٣ ، ٥) + هـ(-٢ ، ١)$

$= (٣م ، ٥م) + (-٢هـ ، هـ) = (٣م - ٢هـ ، ٥م + هـ)$

$\therefore -١ = ٣م - ٢هـ$ ..... (١) ، $٧ = ٥م + هـ$ ..... (٢)

$هـ = ٧ - ٥م$ عوض فى (١) $\therefore -١ = ٣م - ٢(٧ - ٥م)$

$\therefore -١ = ٣م - ١٤ + ١٠م$ $\therefore ١٣ = ١٣م$ $\therefore م = ١$

، عوض فى (١) $\therefore هـ = ٢$ $\therefore \overrightarrow{ج} = \overrightarrow{أ} + ٢\overrightarrow{ب}$

• **قانون** هو لارتباط بين متجه لموضع $\overrightarrow{ج}$ الذى له نهايته تمثل المتجه وأى قطعة مستقيمة موجهة لها بداية ونهاية ، ولتكن $\overrightarrow{أب}$ متكافئة مع متجه الموضع $\overrightarrow{ج}$.

القانون : $\boxed{\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ج}}$

وأيضًا إذ كان : $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{جـ د}$

$\Leftarrow \boxed{\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{د} - \overrightarrow{ج}}$

ملحوظة : هذا القانون موجود فى كتاب الوزارة بعد درسين .

• **تعريف معيار المتجه :** هو طول القطعة المستقيمة الممثلة للمتجه .

فإذا كان : $\overrightarrow{ر} = (س ، ص)$ فإن $\|\overrightarrow{ر}\| = \sqrt{س^2 + ص^2}$

• **ملحوظة هامة :** المقياس يتعامل مع الأعداد الحقيقية بكل المعدل يتعامل مع المتجهات .

• **مثال (٢) :** إذا كان أ = (٣ ، -٢) ، ب = (٦ ، ٢) ، ج = (١ ، ٣) ، د = (٤ ، ٧)

أولاً : بين أن $\overrightarrow{أب}$ تكافئ $\overrightarrow{جـ د}$ ثانيًا : أوجد $|\overrightarrow{أب}|$

الحل

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٦ ، ٢) - (٣ ، -٢) = (٣ ، ٤)$

، $\overrightarrow{جـ د} = \overrightarrow{د} - \overrightarrow{ج} = (٤ ، ٧) - (١ ، ٣) = (٣ ، ٤)$

$\therefore \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{جـ د}$ $\therefore |\overrightarrow{أب}| = |\overrightarrow{جـ د}| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$

مثال (٢) في مستوى إحداثي المتجهان أ = (٣ ، −٢) ، ب = (٦ ، ٢) ، جـ = (١ ، ٣) ، د = (٤ ، ٧) إذا كانت نقطة المنتصف موجهه $\overrightarrow{ن}$ = $\overrightarrow{أم}$ = $\overrightarrow{ءد}$

أوجد إحداثي كل من م ، ء

الحل

$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{أم} \Leftarrow \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{م} - \overrightarrow{أ}$

$\Leftarrow \overrightarrow{م} - (٣ ، -٢) = (٦ ، ٢) - (١ ، ٣)$

$\overrightarrow{م} = (٦ ، ٢) - (١ ، ٣) + (٣ ، -٢) = (٢ ، -١)$

$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{ءد} \Leftarrow \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{د} - \overrightarrow{ء} \Leftarrow \overrightarrow{ء} = \overrightarrow{د} - \overrightarrow{جـ} + \overrightarrow{ب}$

$\therefore \overrightarrow{ء} = (٤ ، ٧) - (١ ، ٣) + (٦ ، ٢) = (٩ ، ٦)$

تمرين (٢): على مفهوم المتجه هندسيا وجبريا

١ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (٠ ، ١١)$

اكتب كلاً مما يأتي:

أولاً: $٢\overrightarrow{ب}$ ، $٣\overrightarrow{جـ}$ ، $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{جـ}$ ، $\frac{١}{٢}(\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ})$

ثانيًا: عبر عن $\overrightarrow{جـ}$ بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

٢ إذا كانت $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -٦)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (-٦ ، ١٤)$ ، أوجد:

أولاً: $٢\overrightarrow{أ}$ ، $-\overrightarrow{ب}$ ، $\frac{١}{٢}\overrightarrow{جـ}$ ، $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{جـ}$

ثانيًا: عبر عن $\overrightarrow{جـ}$ بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

٣ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٦ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٤ ، ٣)$

أوجد: $|\overrightarrow{أب}|$ ، $|\overrightarrow{ب}|$ ، $|٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}|$ ، $|٢\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}|$

٤ إذا كان أ = (٢ ، −٣) ، ب = (٣ ، ١) أوجد متجه الموضع المكافئ لـ $\overrightarrow{أب}$

٥ إذا كان أ = (٨ ، ٣) ، ب = (٣ ، ٥) ، وكان $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{وجـ}$

أوجد إحداثي (جـ)

٦ أوجد متجه الموضع المكافئ لـ $\overrightarrow{ق}$ حيث $\overrightarrow{ق} = (٢ ، -٣)$ ، ل = (٣ ، ٥)

٧ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (١ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٠ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (-١ ، ٠)$

أوجد $٢\overrightarrow{أ}$ ، $٣\overrightarrow{ب}$ ، $|\overrightarrow{جـ}|$

٨ أ ب جـ د شكل رباعي فيه أ = (−١ ، −٢) ، ب = (٧ ، ٠) ، جـ = (٨ ، ٤) ، د = (٠ ، ١٢) أثبت أن $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{دجـ}$

٩ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه: أ = (٨ ، ٤) ، ب = (٥ ، ٦) ، جـ = (−١ ، ٥)

وجد إحداثي نقطة (د)

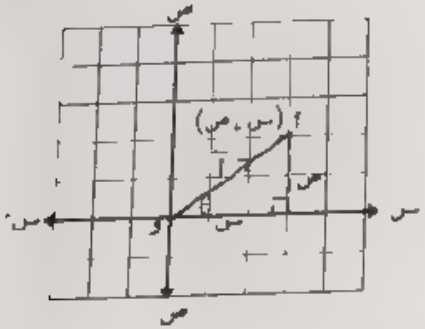
١٠ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٣ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (١ ، ٢)$ فأوجد $|\overrightarrow{أب}|$

١١ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٢ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٥ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (٤ ، -٢)$

أوجد $|٢\overrightarrow{ب}\overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أب}|$

درس ٣ الصور المختلفة للمتجه

• الصورة القطبية لمتجه الموضع:



θ هي الزاوية المحصورة بين $\overrightarrow{وأ}$ ، وسَ الاتجاه الموجب لمحور السينات.

نوجد ظا θ = $\frac{ص}{س}$ ثم نوجد $|\overrightarrow{وأ}|$

$\therefore \overrightarrow{وأ} = (س ، ص) = (|\overrightarrow{وأ}| ، θ)$

وهي الصورة القطبية لمتجه الموضع.

• نلاحظ أن: س = $|\overrightarrow{وأ}|$ جتا θ ، ص = $|\overrightarrow{وأ}|$ جا θ

• مثال (١): إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٨\sqrt{٣} ، ٨)$ أوجد الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ}$

الحل

$|\overrightarrow{أ}|$ = طول $\overrightarrow{وأ} = \sqrt{(٨\sqrt{٣})^٢ + (٨)^٢} = \sqrt{١٩٢ + ٦٤} = \sqrt{٢٥٦}$

= ١٦ وحدة طول

$\because$ ظا θ = $\frac{ص}{س} = \frac{٨}{٨\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ $\therefore$ ق(θ) = ظا$^{-١}$$(\frac{١}{\sqrt{٣}})$ = ٣٠° = $\frac{\pi}{٦}$

$\therefore \overrightarrow{أ}$ في الصورة القطبية = $(١٦ ، \frac{\pi}{٦})$

• **متجه الوحدة:** هو متجه معياره وحدة

يعبر عن المتجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$

• **تعريف:** (١) **متجه الوحدة الأساسي** $\overleftarrow{س}$: هو القطعة المستقيمة الموجهة التي مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور السينات حيث $\overleftarrow{س} = (١ ، ٠)$

(٢) **متجه الوحدة الأساسي** $\overleftarrow{ص}$: هو القطعة المستقيمة الموجهة التي مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات حيث $\overleftarrow{ص} = (٠ ، ١)$

$$\overleftarrow{أ} = (س ، ص) = س\overleftarrow{س} + ص\overleftarrow{ص}$$

• مثال (٢): عبر عن المتجهات بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين :

أ $\overleftarrow{م} = (٢ ، ٧)$ [ب] $\overleftarrow{ل} = (-٥ ، ٠)$ [جـ] $\overleftarrow{ع} = (٠ ، ٨)$

الحل

أ $\overleftarrow{م} = ٢\overleftarrow{س} + ٧\overleftarrow{ص}$ [ب] $\overleftarrow{ل} = -٥\overleftarrow{س}$ [جـ] $\overleftarrow{ع} = ٨\overleftarrow{ص}$

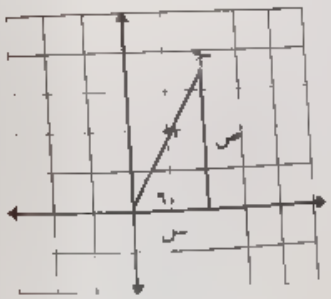
• مثال (٣): أوجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين المتجه الذي يعبر عن كل من

أ سرعة لمنطقة سيارة تقطع ٣٠ كم كل ساعة في اتجاه الغرب

ب إزاحة نقطة في اتجاه الجنوب ٨٠ كم

جـ قوة مقدارها ٦٠ نيوتن تؤثر في نقطة مادية في اتجاه ٦٠° في شمال الشرق .

الحل



أ نفرض متجه الموضع $\overleftarrow{ب}$ ∴ $\overleftarrow{ب} = -٣٠\overleftarrow{س}$

ب نفرض متجه الموضع $\overleftarrow{أ}$ ∴ $\overleftarrow{أ} = -٨٠\overleftarrow{ص}$

جـ لأجد متجه الموضع $\overleftarrow{جـ}$

$\overleftarrow{جـ} = (٦٠ ، ٦٠)$ الصورة القطبية

س = ٦٠ جتا ٦٠

ص = ٦٠ جا ٦٠

س = ٦٠ × $\frac{١}{٢}$ = ٣٠ ، ص = ٦٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $٣٠\sqrt{٣}$

$\overleftarrow{جـ} = (٦٠ ، ٦٠) = (٣٠ ، ٣٠\sqrt{٣})$

$\overleftarrow{جـ} = ٣٠\overleftarrow{س} + ٣٠\sqrt{٣}\overleftarrow{ص}$

تمرين (٣): على الصورة المختلفة للمتجه

١ إذا كان $\overleftarrow{أ} = (٤ ، ٣\sqrt{٤})$ أوجد الصورة القطبية للمتجه $\overleftarrow{أ}$

٢ إذا كان $\overleftarrow{جـ} = (١٢\sqrt{٢} ، \frac{٣\pi}{٤})$ أوجد إحداثيي نقطة (جـ)

عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين ثم أوجد معياره

٣ $\overleftarrow{أ} = (-٣ ، ٤)$

٤ $\overleftarrow{ب} = (٥ ، -١٢)$

٥ $\overleftarrow{ل} = (-٣ ، -٦)$

٦ $\overleftarrow{ج} = (-٧ ، ٠)$

٧ $\overleftarrow{ق} = (٠ ، ٤)$

أوجد الصورة القطبية لكل من المتجهات التالية :

٨ $\overleftarrow{م} = ٣\sqrt{٢}\overleftarrow{س} + ٣\sqrt{٢}\overleftarrow{ص}$

٩ $\overleftarrow{ن} = ٥\overleftarrow{س} + ٥\overleftarrow{ص}$

١٠ $\overleftarrow{ك} = ٣\overleftarrow{س} + ٣\sqrt{٣}\overleftarrow{ص}$

١١ إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (٣ ، -٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (-٢ ، ٥)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٠ ، ١١)$

كتب كلاً من المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين :

$٢\overleftarrow{ب} ، ٣\overleftarrow{جـ} ، (\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{جـ}) ، \frac{١}{٢}(\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ})$

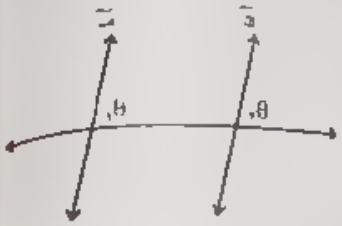
أوجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين المتجه الذي يعبر عن :

١٢ سرعة منتظمة ٦٠ كم/س في اتجاه الغرب .

١٣ قوة مقدارها ٥٠ ث.كجم في اتجاه ٣٠° شمال الشرق .

١٤ إزاحة جسم مسافة ٤٠ سم في اتجاه الشمال الغربي

درس ٤ توازى متجهين وتعامدهما



إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين غير صفريين

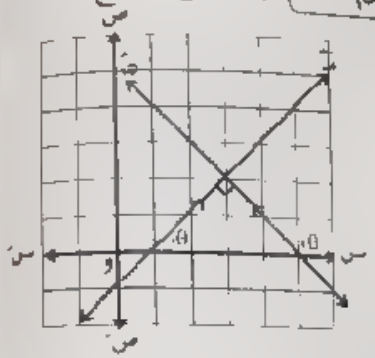
حيث $\overleftarrow{أ} = (س_١ ، ص_١)$ ، $\overleftarrow{ب} = (س_٢ ، ص_٢)$

(١) إذا كان $\overleftarrow{أ} \parallel \overleftarrow{ب}$

فإن $ظا\theta_١ = ظا\theta_٢$ يعني $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$

ويكون $س_١ص_٢ = س_٢ص_١$

$\therefore س_١ص_٢ - س_٢ص_١ = ٠$ والعكس صحيح



(٢) إذا كان $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$

$ظا\theta_١ \times ظا\theta_٢ = -١$

$\frac{ص_١}{س_١} \times \frac{ص_٢}{س_٢} = -١$

$\therefore س_١س_٢ + ص_١ص_٢ = ٠$

والعكس صحيح.

مثال (١): إذا كان $\overleftarrow{أ} = (-٤ ، ٦)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٦ ، -٩)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٣ ، ٢)$

أثبت أن: $\overleftarrow{أ} \parallel \overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{ب} \perp \overleftarrow{جـ}$ ، $\overleftarrow{جـ} \perp \overleftarrow{أ}$

الحل

أولاً: الطرف الأيمن لشرط التوازى $= س_١ص_٢ - س_٢ص_١$

$= -٤ \times -٩ - ٦ \times ٦ = ٣٦ - ٣٦ =$ صفر = الأيسر

$\therefore \overleftarrow{أ} \parallel \overleftarrow{ب}$

ثانياً: الطرف الأيمن لشرط التعامد $= س_١س_٢ + ص_١ص_٢$

$= ٦ \times ٣ + -٩ \times ٢ =$ صفر = الأيسر

$\therefore \overleftarrow{ب} \perp \overleftarrow{جـ}$

ثالثاً: لإثبات أن $\overleftarrow{جـ} \perp \overleftarrow{أ}$

$\therefore س_١س_٢ + ص_١ص_٢ = -٤ \times ٣ + ٦ \times ٢ =$ صفر = الأيسر

$\therefore \overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{جـ}$

مثال (٢): إذا كان $\overleftarrow{أ} = (٣ ، -٥)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ك ، ٢)$ أوجد ك عندما:

(١) $\overleftarrow{أ} \parallel \overleftarrow{ب}$ (٢) $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$

الحل

(١) عندما $\overleftarrow{أ} \parallel \overleftarrow{ب}$ $\Leftarrow$ $س_١ص_٢ - س_٢ص_١ = ٠$ $\Leftarrow$ $٣ \times ٢ - ك \times -٥ = ٠$

$\therefore ٥ك = -٦$ $\therefore ك = \frac{-٦}{٥}$

(٢) عندما $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$ $\therefore س_١س_٢ + ص_١ص_٢ = ٠$ $\Leftarrow$ $٣ \times ك + -٥ \times ٢ = ٠$

$\therefore ٣ك = ١٠$ $\therefore ك = \frac{١٠}{٣}$

تمرين (٤) على توازى متجهين وتعامدهما

١ بيّن أن المتجهين $\overleftarrow{أ} = ٣\overleftarrow{س} - ٥\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب} = -٦\overleftarrow{س} + ١٠\overleftarrow{ص}$ متوازيان.

٢ بيّن أن المتجهين $\overleftarrow{أ} = (٤ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٨ ، ٤)$ متوازيان.

٣ بيّن أن المتجهين $\overleftarrow{أ} = (٣ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (-٣ ، ٢)$ متوازيان.

٤ بيّن أن المتجهين $\overleftarrow{أ} = (-١٠ ، ٢٤)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٦ ، -٨)$ غير متوازيين.

٥ بيّن أن المتجهين $\overleftarrow{أ} = ٢\overleftarrow{س} + ٤\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب} = (-٦ ، ٣)$ متعامدان.

٦ بيّن أن المتجهين $\overleftarrow{ب} = -٦\overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٤ ، ٨)$ متعامدان.

٧ بيّن أن المتجهين $\overleftarrow{ب} = (-٢ ، ١)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٢ ، -٢)$ غير متعامدين.

٨ إذا كان: $\overleftarrow{أ} = (٢ ، ٣)$ ، $\overleftarrow{ب} = (١ ، ٥)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٣ ، ١)$

بيّن أن $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ}$ متوازيان.

٩ إذا كان: $\overleftarrow{أ} = (٢ ، ٤)$ ، $\overleftarrow{ب} = (١ ، ٤)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (-٥ ، -٢)$

بيّن أن $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ}$ متعامدان.

١٠ إذا كان: $\overleftarrow{أ} = (١ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٣ ، ٢)$ بين أن $٢\overleftarrow{أ} + ٣\overleftarrow{ب}$ ،

والمتجه $\overleftarrow{جـ} = (-١١ ، -١٠)$ متوازيان.

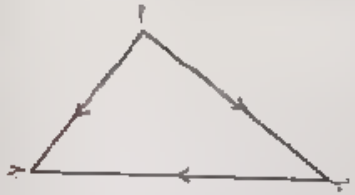
١١ إذا كان: $\overleftarrow{أ} = (٢ ، ١)$ ، $\overleftarrow{ب} = (\frac{-٧}{٥} ، ٢)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٣ ، ٦)$

فأثبت أن: $(\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب})$ يوازى $(\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ})$

وجد العدد (ك) إذا كان ذلك ممكنا بحيث تتحقق الشروط المحددة

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible] (١٥ ، ك) = (٤ ، ٣) ، [illegible]
- [illegible]
- [illegible] (١٢٠ ، ٤) = [illegible] ، [illegible] (٣٠ ، ٠) = [illegible]
- [illegible] (٣٠ ، ٦) = [illegible] ، [illegible] (٣٠ ، ٤) = [illegible]

درس ٥ العمليات على المتجهات



• **قاعدة المثلث لجمع متجهين (علاقة شال):**

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أجـ}$

• **ملحوظة (١)** $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بأ} = \overrightarrow{٠}$

$\overrightarrow{أب}$ هو المعكوس الجمعي لـ $\overrightarrow{بأ}$

أي $\overrightarrow{بأ} = -\overrightarrow{أب}$

> **ملحوظة:** لحفظ القانون كما لو كنا حذفنا ب مع ب يبقى $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أجـ}$

• مثال (١): في رسم أ ب جـ ، بين أن $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{جـأ} = \overrightarrow{٠}$

الحل

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{أجـ}$ ⇐ $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ} - \overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{٠}$

$\overrightarrow{أجـ} = -\overrightarrow{جـأ}$ ⇐ $\therefore \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{جـأ} = \overrightarrow{٠}$

• مثال (١): في الشكل المقابل:

$\overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{جـ د} + \overrightarrow{د هـ} = \overrightarrow{أهـ}$

الحل

العمل: ضع $\overrightarrow{أجـ}$ ، $\overrightarrow{أد}$

في ▱ أ ب جـ د $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{أجـ}$ ..... (١)

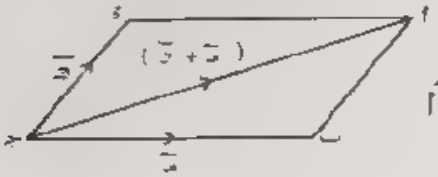
في ▱ أ جـ د $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـ د} = \overrightarrow{أد}$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{جـ د} = \overrightarrow{أد}$

في Δ أ هـ د $\overrightarrow{أد} + \overrightarrow{د هـ} = \overrightarrow{أهـ}$ من (٢)

$\therefore \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{جـ د} + \overrightarrow{د هـ} = \overrightarrow{أهـ}$ (المطلوب)

• **قاعدة متوازي الأضلاع لجمع متجهين**



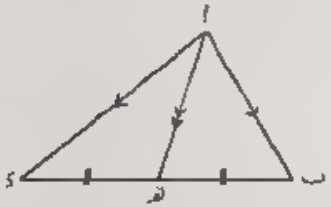
$\overrightarrow{م} + \overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{جـ ب} + \overrightarrow{جـ د}$

$\overrightarrow{جـ د} = \overrightarrow{ب أ}$ ∴ $\overrightarrow{جـ ب} + \overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{جـ أ}$

لاحظ أن $\overrightarrow{جـ أ}$ قطر

• **نتائج:** (١) $\overrightarrow{جـ د} + \overrightarrow{جـ ب} = \overrightarrow{جـ أ} = \overrightarrow{جـ ب} + \overrightarrow{جـ د}$

$\overrightarrow{م} + \overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{هـ} + \overrightarrow{م}$

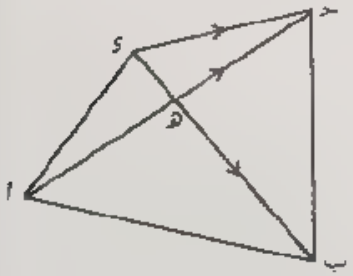


(٢) في Δ أ ب د : إذا كانت هـ منتصف ب د

$\boxed{\therefore \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أد} = ٢\overrightarrow{أهـ}}$

• مثال (٣): في أي شكل رباعي أ ب جـ د ، أثبت أن: $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{د جـ} = \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{د ب}$

الحل



يوجد عدد كبير من الحلول لهذه المسائل

فالحل ليس وحيد

في Δ أ جـ د $\overrightarrow{أد} + \overrightarrow{د جـ} = \overrightarrow{أجـ}$ ... (١)

في Δ د ب أ. $\overrightarrow{د أ} + \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{د ب}$ ... (٢)

نجمع (١) ، (٢) :

$\therefore \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{د جـ} + \overrightarrow{د أ} + \overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{د ب}$ ..... (١)

$\overrightarrow{أد} = -\overrightarrow{د أ}$ ∴ نحذف $\overrightarrow{أد}$ مع $\overrightarrow{د أ}$ من (٢)

$\therefore \overrightarrow{د جـ} + \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{د ب}$

حل آخر بفرض أن $\overrightarrow{أجـ} \cap \overrightarrow{بـ د} = \{هـ\}$

في △ هـ جـ د : $\overrightarrow{د هـ} + \overrightarrow{هـ جـ} = \overrightarrow{د جـ}$ .. (١)

في △ هـ ب أ : $\overrightarrow{أهـ} + \overrightarrow{هـ ب} = \overrightarrow{أب}$ (٢)

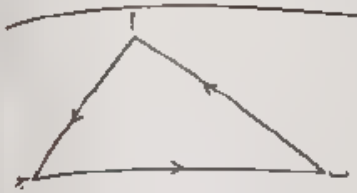
بجمع (١)، (٢) : $\overrightarrow{د هـ} + \overrightarrow{هـ جـ} + \overrightarrow{أهـ} + \overrightarrow{هـ ب} = \overrightarrow{د جـ} + \overrightarrow{أب}$

$\overrightarrow{د هـ} + \overrightarrow{هـ ب} = \overrightarrow{د ب}$ ، $\overrightarrow{أهـ} + \overrightarrow{هـ جـ} = \overrightarrow{أجـ}$

بعرف الإبدال عند $\overrightarrow{د جـ} + \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{د ب}$

حل آخر في كتاب التوجيه ص ٧٣

قاعدة طرح المتجهات هندسيا



$\overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ ب}$

وهي مرسومة بالقاعدة

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

ملحوظة : لحفظ القانون كم لو كنا حذفنا ب مع ب يبقى $\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{جـ ب}$

مثال (٤) : إذا كان $٣\overrightarrow{هـ} - ٢\overrightarrow{أب} - ٣\overrightarrow{جـ ب} + ٥\overrightarrow{ب أ}$ أثبت أن $\overrightarrow{هـ} - \overrightarrow{جـ أ}$

الحل

$٣\overrightarrow{هـ} - ٢(\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}) - ٣(\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{جـ}) + ٥(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب})$

$٣\overrightarrow{هـ} - ٢\overrightarrow{ب} + ٢\overrightarrow{أ} = ٣\overrightarrow{ب} - ٣\overrightarrow{جـ} + ٥\overrightarrow{أ} - ٥\overrightarrow{ب}$

$٣\overrightarrow{هـ} = ٣\overrightarrow{ب} - ٣\overrightarrow{جـ} + ٥\overrightarrow{أ} - ٥\overrightarrow{ب} + ٢\overrightarrow{ب} - ٢\overrightarrow{أ}$

$= ٣\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{جـ} = ٣(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{جـ}) = ٣\overrightarrow{جـ أ}$

$٣\overrightarrow{هـ} = ٣\overrightarrow{جـ أ}$ ∴ $\overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{جـ أ}$

وجد حل آخر في كتاب التوجيه ص ٧٥

تمرين (٥) : على العمليات على المتجهات

❶ أ ب جـ د شكل رباعي فيه $\overrightarrow{بجـ} = ٣\overrightarrow{أد}$ ، أثبت أن :

أولاً : أ ب جـ د شبه منحرف $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{ب د} = ٤\overrightarrow{أد}$

تمرين في الكتاب

❷ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه (هـ) منتصف $\overrightarrow{بجـ}$ ، أثبت أن :

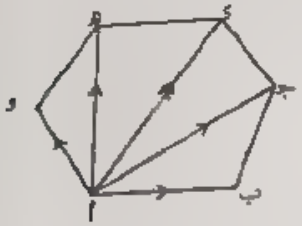
$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دجـ} = ٢\overrightarrow{أهـ}$

❸ في الشكل المقابل :

أ ب جـ د هـ و مسدس

أثبت أن :

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{أهـ} + \overrightarrow{أو} = ٢\overrightarrow{أد}$



❹ في أي مضلع رؤوسه النقط أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، أثبت أن :

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـ د} + \overrightarrow{د هـ} + \overrightarrow{هـ أ} = \overrightarrow{٠}$

❺ أ ب جـ د شكل رباعي فيه : $٢\overrightarrow{بجـ} = ٥\overrightarrow{أد}$ ، أثبت أن :

أولاً : $٢\overrightarrow{أجـ} + ٢\overrightarrow{ب د} = ٧\overrightarrow{أد}$ ثانياً : $٢\overrightarrow{أب} - ٢\overrightarrow{دجـ} = ٣\overrightarrow{د أ}$

❻ في أي شكل رباعي أ ب جـ د ، أثبت أن : $\overrightarrow{د ب} - \overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{د أ} - \overrightarrow{بجـ}$

❼ إذا كان أ ب جـ د متوازي أضلاع ، فأثبت أن :

أولاً : $٢\overrightarrow{أم} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أد}$ حيث م نقطة تقاطع قطريه .

ثانياً : $\overrightarrow{هـ د} + \overrightarrow{هـ ب} = \overrightarrow{هـ أ} + \overrightarrow{هـ جـ}$ حيث هـ أي نقطة في المستوى .

❽ أ ب جـ مثلث ، د نقطة تقع على $\overrightarrow{بجـ}$ بحيث $٢\overrightarrow{ب د} = ٣\overrightarrow{دجـ}$

أثبت أن : $٥\overrightarrow{أد} = ٢\overrightarrow{أب} + ٣\overrightarrow{أجـ}$

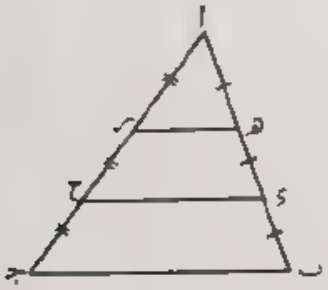
❾ في الشكل المقابل :

أ هـ = هـ د = د ب ،

أ ر = ر ح = ح جـ ،

أثبت أن :

$\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{د ح} + \overrightarrow{هـ ر}$

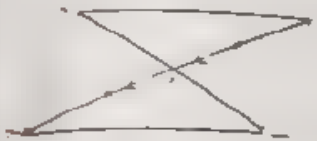


تطبيقات على المتجهات

درس ٦

مثال (١)

الحل



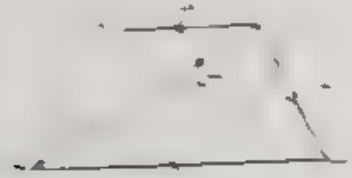
تمرين (١): على تطبيقات المتجهات

❶

❷

❸

❹ في الشكل المقابل



درس ٧ نشاط تطبيقات فيزيائية : يتعرف على

أولاً القوة المحصلة

مثال (٢): في الشكل المقابل

الحل

$\overline{ق}_١ = ٨٠\,\overline{ى}$ ، $\overline{ق}_٢ = -١٠\,\overline{ى}$

المحصلة $(\overline{ح}) = \overline{ق}_١ + \overline{ق}_٢ = ٨٠\,\overline{ى} + (-١٠\,\overline{ى}) = ٧٠\,\overline{ى}$

مثال (٢) [illegible] $\overrightarrow{ق_١} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ في نقطة [illegible] محصلة مقدارا واتجاه (القوى مقاسة بالنيوتن)

الحل

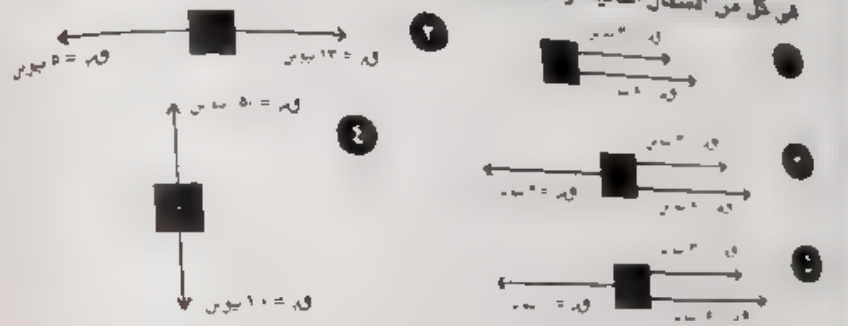
$\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} = ٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص} = (٣ ، ٤)$

مقدار المحصلة = $|\overrightarrow{ج}| = \sqrt{٣^٢ + ٤^٢} = ٥$ نيوتن

ظا (اتجاه المحصلة) = $\frac{ص}{س} = \frac{٤}{٣}$ ، ق(اتجاه المحصلة) = $(\frac{٤}{٣})^{-١}$ = ٥٣° ٧' ٤٨"

تمرين (٧) على تطبيقات فيزيائية (محصلة القوى)

في كل من الأشكال التالية أوجد المحصلة :



١ [illegible] $\overrightarrow{ق_١} = ٣\overrightarrow{س} + ٧\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = ٢\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص}$ في نقطة مادية [illegible] المحصلة علماً بأن القوى مقاسة بالنيوتن .

٢ [illegible] $\overrightarrow{ق_١} = ٢\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = ٣\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ في نقطة [illegible] المحصلة علماً بأن القوى مقاسة بـ ث.كجم .

٣ [illegible] $\overrightarrow{ق_١} = ٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = -٢\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = ٢\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ في نقطة [illegible] المحصلة علماً بأن القوى مقاسة بالنيوتن .

٤ [illegible] $\overrightarrow{ق_١} = ٢\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = أ\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = -٥\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص}$ في نقطة [illegible] أ ، ب إذا كانت المحصلة

$\overrightarrow{ج} = ٥\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ [ب] $\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{٠}$

[illegible] أن محصلة هذه القوى متلاقية في نقطة واحدة = $\overrightarrow{٠}$

ثانيا السرعة النسبية

[illegible] السرعة النسبية لجسم (أ) بالنسبة إلى جسم (أ) آخر ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{ع_{أب}}$ هي السرعة التي [illegible] (ب) متحركًا بها للجسم (أ)

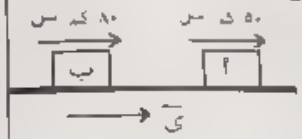
فإذا كان $\overrightarrow{ع}$ سرعة [illegible] ، $\overrightarrow{ع}$ سرعة السيارة ب الفعلية

فإن : $\overrightarrow{ع_{أب}} = \overrightarrow{ع_أ} - \overrightarrow{ع_ب}$ أيضا $\overrightarrow{ع_{ب أ}} = \overrightarrow{ع_ب} - \overrightarrow{ع_أ}$

مثال (١) : تتحرك [illegible] أ على طريق مستقيم بسرعة ٥٠ كم/س وتتحرك السيارة (ب) على نفس الطريق بسرعة ٨٠ كم/س ، أوجد سرعة (أ) بالنسبة إلى (ب) عندما : أولاً : تتحرك السيارتان في اتجاه واحد . ثانيًا : تتحرك السيارتان في اتجاهين متضادين .

الحل

أولاً : تتحركان في اتجاه واحد :



باعتبار $\overrightarrow{ى}$ في اتجاه السيارتين

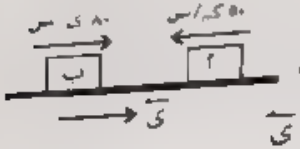
$\overrightarrow{ع_أ} = ٦٠\overrightarrow{ى}$

، $\overrightarrow{ع_ب} = ٨٠\overrightarrow{ى}$

$\overrightarrow{ع_{أب}} = \overrightarrow{ع_أ} - \overrightarrow{ع_ب} = ٥٠\overrightarrow{ى} - ٨٠\overrightarrow{ى}$

$= -٣٠\overrightarrow{ى}$

ثانيًا : تتحركان في اتجاهين متضادين :



باعتبار $\overrightarrow{ى}$ في اتجاه السيارة ب

$\therefore \overrightarrow{ع_ب} = ٨٠\overrightarrow{ى}$

، $\overrightarrow{ع_أ} = -٥٠\overrightarrow{ى}$

$\overrightarrow{ع_{أب}} = \overrightarrow{ع_أ} - \overrightarrow{ع_ب} = -٥٠\overrightarrow{ى} - ٨٠\overrightarrow{ى}$

$= -١٣٠\overrightarrow{ى}$

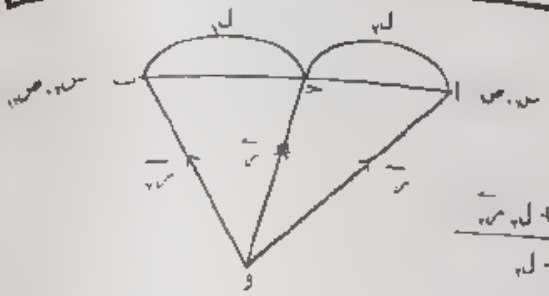
تمرين (٨) على (السرعة النسبية)

١ تتحرك سيارة أ على طريق مستقيم بسرعة ٣٠ كم/س وتتحرك السيارة (ب) على نفس الطريق بسرعة ٧٠ كم/س ، أوجد سرعة (ب) بالنسبة إلى (أ) عندما تتحرك السيارتان في : أولاً : اتجاه واحد . ثانيًا : اتجاهين متضادين .

٢ تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٩٠ كم/س وتحركت دراجة بخارية على نفس الطريق بسرعة ٤٠ كم/س ، أوجد سرعة الدراجة البخارية بالنسبة إلى السيارة عندما يتحرك في : أولاً . اتجاه واحد . ثانيًا : اتجاهين متضادين .

٣ تتحرك سيارة أ تراقب السرعة على الطريق بسرعة ٣٠ كم/س ، راقبت سيارة (ب) قادمة في الاتجاه المضاد ، فبدت كأنها تتحرك بسرعة ١١٠ كم/س . فما هي السرعة الفعلية للسيارة الثانية (ب) ؟

درس ١ تقسيم قطعة مستقيمة



١) التقسيم من الداخل

حيث تقسم $\overline{أب}$ من الداخل

نسبة $ل_١ : ل_٢$

فإن $\overline{ج} = \frac{ل_١ \overline{ب} + ل_٢ \overline{أ}}{ل_١ + ل_٢}$

وفي الصورة المحققة

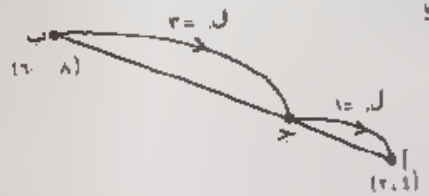
وإذا (س ، ص) = $\left(\frac{ل_١ س_٢ + ل_٢ س_١}{ل_١ + ل_٢} ، \frac{ل_١ ص_٢ + ل_٢ ص_١}{ل_١ + ل_٢} \right)$

وفي الصورة الإحداثية

$س = \frac{ل_١ س_٢ + ل_٢ س_١}{ل_١ + ل_٢}$ ، $ص = \frac{ل_١ ص_٢ + ل_٢ ص_١}{ل_١ + ل_٢}$

• مثال (١) : إذا كانت أ(٤ ، ٢) ، ب = (٨ ، −٦) أوجد إحداثيي النقطة ج التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٣

الحل



$\overline{ج} = \frac{ل_١ \overline{ب} + ل_٢ \overline{أ}}{ل_١ + ل_٢}$

$\overline{ج} = \frac{٣ \times (٨ ، -٦) + ١ \times (٤ ، ٢)}{٣ + ١}$

$\overline{ج} = \frac{(٢٠ ، ٠)}{٤} = (٥ ، ٠)$

∴ إحداثيا نقطة ج هي (٥ ، ٠)

٢) التقسيم من الخارج

• مثال (٢) : إذا كانت أ(٢ ، ٥) ، ب = (٣ ، −٢) وجد إحداثيي النقطة ج التي تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢

الحل

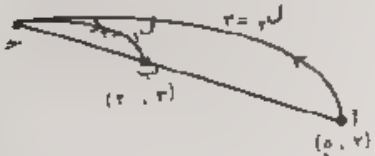
$\overline{ج} = (٢ ، ٥)$ ، $\overline{ب} = (٣ ، -٢)$

∵ $ل_١ = ٣$ ، $ل_٢ = -٢$

$\overline{ج} = \frac{ل_١ \overline{ب} + ل_٢ \overline{أ}}{ل_١ + ل_٢}$

$\overline{ج} = \frac{٣ \times (٣ ، -٢) - ٢ \times (٢ ، ٥)}{٣ - ٢}$

∴ $\overline{ج} = (٥ ، -١٦)$



• نتائج :

(١) إذا كانت ج(س ، ص) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ فإن :

$س = \frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $ص = \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$

(٢) نقطة تلاقي المتوسطات : م = $\left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣} \right)$

ثالثاً . إيجاد نسبة التقسيم إذا كانت ج تقسم $\overline{أب}$ بنسبة $ل_١ : ل_٢$

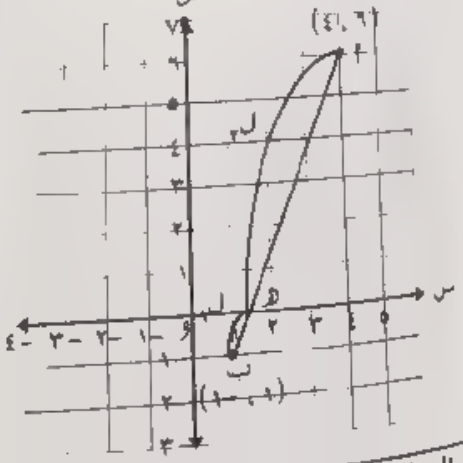
وكان (١) نسبة التقسيم : $\frac{ل_٢}{ل_١} > ٠$ كان التقسيم من الداخل .

(٢) نسبة التقسيم : $\frac{ل_٢}{ل_١} < ٠$ كان التقسيم من الخارج .

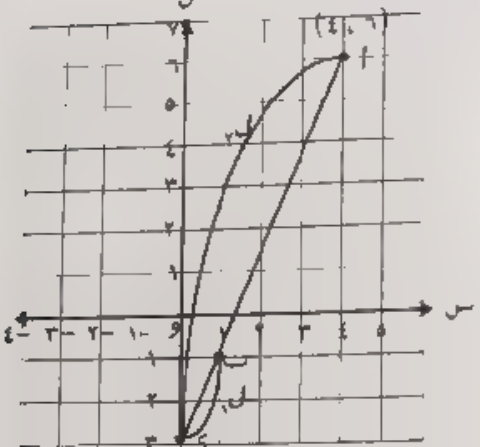
• مثال (٣) : إذا كانت أ = (٦ ، ٤) ، ب = (١ ، −١) ، أوجد النسبة التي تقسم $\overline{أب}$ بمحور السينات ومحور الصادات مبيناً نوع التقسيم في كل حالة ثم أوجد إحداثي نقطة التقسيم في كل حالة .

الحل

بفرض أن محور السينات يقطع $\overline{أب}$ في نقطة (هـ) = (س ، ٠)



بفرض أن محور الصادات يقطع $\overline{أب}$ في نقطة (ى) = (٠ ، ص)



[illegible]

ء = (٠ ، ص)

س = (ل١ س٢ + ل٢ س١) / (ل١ + ل٢)

صفر = (ل١ × ٦ + ل٢ × ١) / (ل١ + ل٢)

٦ل١ = −ل٢

ل١ / ل٢ = ٦ / ١

النقطة من الخارج نسبتها ٦ : ١

وإحداثيا النقطة ء هما (٠ ، ص)

ص = (ل١ ص٢ + ل٢ ص١) / (ل١ + ل٢)

= (٦ × −١ − ١ × ٤) / (٦ − ١) = −١٠ / ٥

= −٢

∴ ء = (٠ ، −٢)

تمرين (١) : على تقسيم قطعة مستقيمة

أولاً التقسيم من الداخل

❶ إذا كان أ = (−١ ، ٧) ، ب = (٥ ، ٢)

أوجد إحداثي النقطة (جـ) التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢

❷ إذا كان أ = (٢ ، ٥) ، ب = (−٥ ، ٢)

أوجد إحداثي النقطة (جـ) التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٣

❸ إذا كان أ = (٢ ، ٥) ، ب = (−١ ، −١)

أوجد إحداثي النقطة (جـ) التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١

❹ إذا كان أ = (٢ ، ٥) ، ب = (−٥ ، −١)

أوجد إحداثي النقطة (جـ) إذا كان جـ ∈ $\overline{أب}$ ، ٥ $\overline{أجـ}$ = ٣ $\overline{أب}$

❺ أوجد إحداثي النقطة (ب) التي تقع عند ربع المسافة بين أ = (−١ ، ١) ، ب = (٧ ، ٥)

ثانياً : التقسيم من الخارج

❻ أوجد إحداثي النقطة ء حيث ء ∈ $\overline{بأ}$ ، ء ∉ $\overline{أب}$ ، ء أ : ء ب = ٣ : ١ وكانت أ = (٣ ، ٤) ، ب = (−٥ ، ٢)

❼ إذا كانت أ = (−٧ ، ٢) ، ب = (٢ ، ٥) أوجد النقطة (جـ) حيث جـ ∈ $\overline{بأ}$ ، جـ ∉ $\overline{بأ}$ والتي بعدها عن ب يساوي ثلاثة أمثال بعدها عن أ.

ثالثاً : مسائل التقسيم من الداخل والخارج :

❽ إذا كانت أ = (٣ ، −٢) ، ب = (−٢ ، ٤) أوجد النسبة التي تقسم بها جـ(٨ ، −٨) القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ مبيناً نوع التقسيم.

❾ أوجد النسبة التي ينقسم بها $\overline{أب}$ بكل من نقطتي تقاطعهما مع محوري الإحداثيات إذا كان أ = (٣ ، −٢) ، ب = (−٢ ، ٥) مع إيجاد نقط التقاطع

❿ إذا كان أ = (٥ ، ٢) ، ب = (−٣ ، ١) أوجد النسبة التي ينقسم بها $\overline{أب}$ بمحور السينات ثم بمحور الصادات على الترتيب مع إيجاد نقط تقاطعهما مع المحورين.

⓫ إذا كانت : أ = (٢ ، ٤) ، ب = (٣ ، ٦) ، جـ = (٥ ، ١٠) على استقامة واحدة أوجد :

أولاً : النسبة التي تقسم بها أ القطعة المستقيمة $\overline{بجـ}$ مبيناً نوع التقسيم.

ثانياً : النسبة التي تقسم بها ب القطعة المستقيمة $\overline{جـأ}$ مبيناً نوع التقسيم.

ثالثاً : النسبة التي تقسم بها جـ القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ مبيناً نوع التقسيم.

⓬ إذا كانت أ = (−٤ ، ٢) ، ب = (١ ، −٢) ، جـ = (١ ، ٦)

أوجد نقطة تلاقي المتوسطات المثلث أ ب جـ

⓭ إذا كانت أ = (٣ ، ٤) ، ب = (−٥ ، ٢) إذا كانت النقطة جـ (٧ ، ص) تقسم $\overline{أب}$ ، أوجد النسبة التي تقسم بها النقطة جـ القطعة المستقيمة الموجهة $\overline{أب}$ مبيناً نوع التقسيم ثم أوجد قيمة (ص).

درس ٢ مراجعة على معادلة الخط المستقيم

(١) [illegible] أس + ب ص + جـ = ٠ تسمى بالصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.

(٢) إذا كان س = أ فهي معادلة مستقيم يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (أ ، ٠)

(٣) إذا كان ص = ب فهي معادلة مستقيم يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ب)

(٤) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢)

ميل الخط المستقيم = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = ظا هـ

حيث هـ هي الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ميل الخط المستقيم : أس + ب ص + جـ = ٠ هي م = $\frac{-معامل\ س}{معامل\ ص}$ = $\frac{-أ}{ب}$

(٥) إذا كان م١ = م٢ فإن المستقيمين متوازيان

(٦) إذا كان م١ × م٢ = -١ فإن المستقيمين متعامدان.

(٧) معادلة المستقيم بدلالة ميله م والجزء المقطوع (جـ) من محور الصادات

$\boxed{ص = م س + جـ}$

مثال (١) : أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (٨ ، ٢)

ثم أوجد الزاوية التي يصنعها المستقيم مع محور السينات الموجب

الحل

ميل المستقيم = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٢ - ٥}{٨ - ٣}$ = $\frac{-٣}{٥}$

ظا هـ = $\frac{-٣}{٥}$ ، ق(هـ) = ١٤٩ ، ٢١

مثال (٢) : أوجد ميل الخط المستقيم ٥س - ٤ص + ٣ = ٠ ثم أوجد الجزء المقطوع من محور الصادات

الحل

ميل المستقيم = $\frac{-معامل\ س}{معامل\ ص}$ = $\frac{-٥}{-٤}$ = $\frac{٥}{٤}$

بالضرب = ٥س - ٣ بقسمة على ٤ ، ص = $\frac{٥}{٤}$س + $\frac{٣}{٤}$

الجزء المقطوع = $\frac{٥}{٤}$ والجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{٣}{٤}$

مثال (٣) : أوجد نقطة تقاطع المستقيم التالي مع محوري الإحداثيات

٢س - ٥ص + ٣ = ٠

الحل

مع س = ٠ ، -٥ص - ٣ ∴ ص = $\frac{-٣}{٥}$

∴ نقطة التقاطع مع محور الصادات (٠ ، $\frac{-٣}{٥}$)

مع ص = ٠ ∴ ٢س = -٣ ∴ س = $\frac{-٣}{٢}$

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات ($\frac{-٣}{٢}$ ، ٠)

مثال (٤) : أوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ويمر بالنقطة (٤ ، ٥)

الحل

ص = م س + جـ ص = ٣س + جـ ∵ (٤ ، ٥) يمر بالمستقيم

تحققه ∴ ٥ = ٣ × ٤ + جـ ∴ جـ = -٧

معادلة المستقيم . $\boxed{ص = ٣س - ٧}$

مثال (٥) : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٣)

الحل

ميل المستقيم = $\frac{٤ - ٣}{٣ - ٥}$ = $\frac{-١}{٢}$ ∴ معادلة المستقيم : ص = م س + جـ

ص = -$\frac{١}{٢}$س + جـ ∵ (٣ ، ٤) تقع على المستقيم ∴ تحققه

٤ = -$\frac{١}{٢}$ × ٣ + جـ ∴ جـ = $\frac{١١}{٢}$

معادلة المستقيم : $\boxed{ص = -\frac{١}{٢}س + \frac{١١}{٢}}$

تمرين (٢) على معادلة الخط المستقيم

١ أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل زوج .

[أ] (٣ ، ٢) ، (-٢ ، ٥) [ب] (٤ ، ٠) ، (٢ ، -١)

[جـ] (٧ ، -١) ، (٣ ، -٣) [د] (-٥ ، -٣) ، (-١ ، ٣)

[illegible] ص = ٢س − ٣

❶ أوجد قيمة أ إذا كان المستقيم ص = أس + ٥ يوازي المستقيم ص = ٢س − ٣

❷ أوجد قيمة أ إذا كان المستقيم: ص = أس − ٣ يوازي المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢) ، (٢ ، ٤)

❸ أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محور الصادات جزءاً موجباً مقداره ٧ وحدات وميله = ٤

❹ أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محور الصادات جزءاً سالباً مقداره ٣ وحدات وميله في محور السينات الموجب زاوية قياسها ٤٥°

❺ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٦) ، وميله = ٤

❻ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (−٣ ، ٥) ، (٥ ، −٣)

❼ أوجد قيمة س في المستقيمات التالية بطريقتين:

٣س − ٣ص + ٨ = ٠ [ب] ٥ص + ٤س − ٢ = ٠

جـ ص = ٨س د] ص = ٥ [هـ] س = ٦

❽ المستقيم أس − ٤ص + ٥ = ٠ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٠,٧٥ ، أوجد قيمة أ

درس ٣ معادلة الخط المستقيم المتجهة

• مقدمة

[illegible] معادلة الخط المستقيم تكون بمعرفة نقطة وميل أو نقطتين على المستقيم ، وقد يرجع إلى المسلمات التالية :

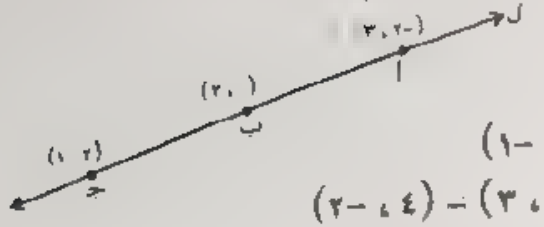
(١) إذا كان أ ، ب نقطتين مختلفتين في المستوى فإنه يوجد خط مستقيم وحيد مار بهما .

(٢) إذا كان خط مستقيم ، ن نقطة في المستوى لا تنتمي إلى (ل) فإنه يوجد خط وحيد جـ يمر بالنقطة ن ويوازي الخط المستقيم (ل) .

تعريف متجه اتجاه مستقيم : هو كل متجه غير صفري يمكن تمثيله بقطعة مستقيمة موجهة على الخط المستقيم أو يوازيه .

فمثلاً : إذا كان لدينا [illegible]

حيث أ = (−٢ ، ٣) ، ب = (٠ ، ٢) ، جـ = (١ ، ٢)



لاحظ أن :

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

$= (٠ ، ٢) - (-٢ ، ٣) = (٢ ، -١)$

$\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ} = (١ ، ٢) - (-٢ ، ٣) = (٤ ، -٢)$

$\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب} = (١ ، ٢) - (٠ ، ٢) = (٢ ، -١)$

لاحظ أن : $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ ، $\overrightarrow{جـأ}$ متجهات اتجاه للخط المستقيم لكن النتائج ترجع إلى القاعدة التالية :

> إذا كان $\overrightarrow{ى} = (أ ، ب)$ متجه اتجاه للمستقيم فإن $ك \overrightarrow{ى}$ متجه اتجاه لنفس المستقيم حيث ك ≠ ٠

فمثلاً : إذا كان متجه اتجاه مستقيم = (٢ ، −٣) فإن كل النقط التالية متجه اتجاه لنفس هذا المستقيم (−٢ ، ٣) ، (٦ ، −٩) ، (٤ ، −٦) . . . .

• الصيغة المتجهة لمعادلة الخط المستقيم .

المار بالنقطة ق و المتجه $\overrightarrow{ى}$ متجه اتجاه للمستقيم : $\boxed{\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ق} + ك \overrightarrow{ى}}$

• مثال (١) : اكتب المعادلة المتجهة للخط المستقيم المار بالنقطة (٥ ، −١) ومتجه اتجاه له (٢ ، ٣)

الحل

$\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ق} + ك \overrightarrow{ى}$ ∴ $\overrightarrow{ر} = (٥ ، -١) + ك(٢ ، ٣)$

ثانيا المعادلات الوسيطية البارامترية :

$\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ق} + ك \overrightarrow{ى}$

$\overrightarrow{ر} = (س ، ص)$ ، $\overrightarrow{ق} = (س_١ ، ص_١)$ ، $\overrightarrow{ى} = (أ ، ب)$

$(س ، ص) = (س_١ ، ص_١) + ك(أ ، ب)$ بالمقارنة

$\boxed{س = س_١ + ك أ}$ ، $\boxed{ص = ص_١ + ك ب}$

يسميان المعادلتان الوسيطيتان للخط المستقيم .

من المعادلتان الوسيطتان نحذف (ك) منهما

ثالثاً المعادلة الكارتيزية

$\frac{س - س_{1}}{أ} = \frac{ص - ص_{1}}{ب}$

$\frac{س - س_{1}}{أ} = \frac{ص - ص_{1}}{ب} = م$ ويوضع $م = \frac{ب}{أ}$ حيث م ميل المستقيم

$\frac{س - س_{1}}{س - س_{2}} = \frac{ص - ص_{1}}{ص - ص_{2}} = م$ هي بداية الصورة الكارتيزية .

ومنها نصل الى الصورة العامة ويطلق أحياناً على (الصورة العامة) الصورة الكارتيزية

• **استنتاج هام:** إذا كان $\overline{ى} = (أ ، ب)$ متجه اتجاه المستقيم .

فإن $\frac{ب}{أ} = م$ = ميل المستقيم

• مثال (٢): أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (−٢ ، ٢) ويتجه $\overline{ى} = (٤ ، ١)$ متجه اتجاه للمستقيم

الحل

$\therefore \overline{ر} = (-٢ ، ٢) + ك(٤ ، ١)$

المعادلة المتجهة $\overline{ر} = \overline{و} + ك\overline{ى}$

$\boxed{س = -٢ + ٤ك ، ص = ٢ + ك}$

المعادلتان الوسيطتان .

نحذف ك منهما $\frac{س + ٢}{٤} = \frac{ص - ٢}{١}$

$\frac{ص - ٢}{١} = \frac{س + ٢}{٤}$ المعادلة الكارتيزية $\therefore ٤ص - ٨ = س + ٢$

$٤ص - س - ١٠ = ٠$ الصورة العامة والصورة الكارتيزية

مثال (٣): أوجد الصور المتجهة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين .

$و = (٣ ، ٢)$ ، $\overline{ى} = (-١ ، ٤)$

الحل

$\overline{ر} = \overline{و} + ك\overline{ى} = (٣ ، ٢) + ك(-١ ، ٤) = (٣ - ك ، ٢ + ٤ك)$

$\therefore$ المتجهة المتكافئة لمتجهة

$\overline{ر} = \overline{و} + ك\overline{ى}$ ، $\overline{ر} = \overline{و} - ك\overline{ى}$ $\overline{و} - ك\overline{ى} = (٣ - ك ، ٢ + ٤ك)$

$\therefore$ المعادلة المتجهة $\therefore$ المعادلة المتجهة

$س = ٣ - ك$ ، $ص = ٢ + ٤ك$ المعادلتان الوسيطتان

$ك = \frac{ص - ٢}{٤}$ ، $س = ٣ - \frac{ص - ٢}{٤}$ $٤س - ص - ١٤ = ٠$

الصورة الكارتيزية

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) ومتجه اتجاه له (٢ ، −١)

أوجد المعادلة الكارتيزية لذي يمر بالنقطة (٣ ، −٤) ويصنع زاوية ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

أوجد الصور المختلفة لمعادلة كل من المستقيمات التي تمر بالنقطتين .

[أ] (٣ ، ١) ، (٦ ، ٤) [ب] (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)

[جـ] (٢ ، ٣) ، (٥ ، ٣) [د] (١ ، ١) ، (١ ، −٢)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) والمتجه $\overline{أب}$ متجه اتجاه حيث أ = (١ ، ٣) ، ب = (٢ ، ٤) في الصورة العامة .

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (−١ ، ٣) والمتجه $\overline{أب}$ متجه اتجاه حيث أ = (٣ ، ١) ، ب = (٥ ، ١) في الصورة العامة .

أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٥ ، ٦) ويوازي محور السينات.

أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم الذي يمر بنقطة الأصل والنقطة (٤ ، ٢)

أوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم الذي ميله $\frac{١}{٢}$ ويمر بالنقطة (٢ ، −١)

أوجد معادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٥) ويوازي المستقيم س − ٢ص − ٧ = ٠

أوجد معادلة المستقيم في الصورة العامة المار بالنقطة (٢ ، −٣) وميله م = ٢ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين أ (٧ ، ٥) ، ب [illegible] أوجد قيمة أ ، ب

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة و = (١ ، −١) ويوازي المتجه س = ٣ − ٢ك ، ص = −١ − ٣ك

أوجد المعادلة المتجهة والكارتيزية للخط المستقيم المار بالنقطة س ، ص والمتجه المحوري $\overline{ى}$ [illegible] يوازي المحور [illegible] المار بالنقطة [illegible]

درس ٤ متجه اتجاه العمودى للمستقيم ومعادلة المستقيم بمعلومية الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات

• **مفهوم:** إذا كان $\overline{ى}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه مستقيم فإن متجه عمودى على المتجه $\overline{ى}$ ليس وحيداً بل عدد كبير لا نهائى .

وهى تعادله فى صورة ك(ب ، −أ)

فمثلاً إذا كان $\overline{ى}$ = (٣ ، ٨) متجه اتجاه المستقيم

فإن متجه عمودى هو (٨ ، −٣) أ، (−٨ ، ٣) أ، (١٦ ، −٦) ، . . . .

• مثال (١): إذا كان المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٤) ومتجه اتجاه العمودى عليه (٢ ، −١) ، أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستقيم

الحل

متجه اتجاه المستقيم هو (١ ، ٢) بتبديل أماكن (٣ ، −١) مع تغيير إشارة إحداهما

$\overline{ر}$ = (٣ ، ٤) + ك(١ ، ٢) المعادلة المتجهة

، س = ٣ + ك ، ص = ٤ + ٢ك المعادلتان الوسيطيتان

أو المعادلتان البارامتريتان

، $\frac{س - ٣}{١} = \frac{ص - ٤}{٢}$ ∴ ٢س − ٩ = ص − ٤

$\boxed{٢س - ص - ٥ = ٠}$

المعادلة الكارتيزية للمستقيم .

المعادلة التى تقطع جزءين من المحورين صورتها : $\boxed{\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١}$

حيث أ ، ب الجزءان المقطوعان من محور السينات والصادات على الترتيب

• مثال (٢): أوجد طولى الجزأين المقطوعين من المحورين للمستقيم :

٥س − ٣ص = ١٥

الحل

بقسمة طرفى المعادلة على ١٥ $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{-٥} = ١$

طولا الجزءين المقطوعين من المحورين السينى والصادى على الترتيب ٣ ، −٥

تمرين (٤) : على متجه اتجاه العمودى للمستقيم ومعادلة المستقيم بمعلومية الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات

١ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) عموديًا على المتجه (−١ ، ٢)

٢ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −١) وعموديًا على المستقيم س + ص − ٨ = ٠

٣ أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٥ ، ٧) وعمودى على المستقيم : $\overline{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك(٤ ، ٣)

٤ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٠ ، ٠) وعموديًا على المستقيم : $\overline{ر}$ = (٠ ، ٣) + ك(٧ ، −٢)

٥ أوجد المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يقطع من المحورين السينى والصادى جزأين موجبين مقدارهما ٢ ، ٣ على الترتيب .

٦ أوجد المعادلة العامة للمستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات النقطتين : (٣ ، ٠) ، (٠ ، −٤)

٧ أوجد طولى الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات للمستقيمات :

[أ] ٢س − ٥ص − ٩ = ٠ [ب] ٢س − ٥ص − ٨ = ٠

[جـ] ٢س = ص [د] ص = ٣

[هـ] س = ٢

٨ أوجد معادلة المستقيم فى الصورة العامة إذا كان يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات جزء طوله ٤ وحدات ، ومن محور الصادات السالب جزءًا طوله ٥ وحدات .

درس ٥ قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين

[illegible]

مثال (١) [illegible] $\vec{ر} = [illegible] - ك(١ ، ٢)$

الحل

[illegible] $م = \frac{-١}{٣}$ = ميل المستقيم الأول

[illegible] $م_٢ = \frac{٢}{١}$ = ميل المستقيم الثاني

$ظا\,هـ = \frac{\frac{١}{٣} - ٢}{١ + \frac{٢}{٣}} = ٧$ ، $ق(هـ) = ٨١°\ ٥٢'\ ١١''$

مثال (٢) : أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم : س − ٢ص + ٣ = ٠ ، والمستقيم المار بالنقطتين (٤ ، −١) ، (٢ ، ١)

الحل

$م = \frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}} = \frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$

ميل المستقيم الثاني $= \frac{١ + ١}{٢ - ٤} = \frac{٢}{-٢} = -١$

$ظا\,هـ = \frac{\frac{١}{٢} - -١}{١ + \frac{١}{٢} \times -١} = ٣$ ∴ $ق(هـ) = ٧١°\ ٣٣'\ ٥٤''$

ملحوظة هامة [illegible] في إيجاد قياس زاوية [illegible] (حادة - منفرجة - قائمة)

تمرين (٥) : على قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين

١ أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

[illegible] + ك(−٢ ، ١) ، $\vec{ر}_٢$ = (−٢ ، ٨) + ك(٦ ، ٣)

٢ أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : ٤س − ٤ص − ١٢ = ٠ ، ٢س − ٣ص − ٨ = ٠

٣ أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم [illegible] س − ٢ص + ١ = ٠ والمستقيم [illegible] ٣

٤ أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : ٣س + ٤ص − ٣٢ = ٠ ، س − ٤ص − ٥ = ٠

٥ س + ٢ص − ٣ = ٠ ، $\frac{ص + ٣}{س + ٢} = \frac{٢}{٣}$

٦ س + ص + ٥ = ٠ ، محور السينات

٧ ص = ٣س ، ص = −٣س

٨ أ ب جـ فيه أ(٠ ، ٢) ، ب = (٣ ، ١) ، جـ = (−٢ ، −١) أوجد قياس (∠أ).

٩ وجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم المار بالنقطتين : (٠ ، ١) ، (−١ ، ٠) والاتجاه الموجب لمحور السينات .

١٠ أوجد قياس الزاوية الحادة بين $\vec{ر}$ = (٥ ، ٨) + ك(٣ ، ٣) والمستقيم : ٢س − ص − ٣ = ٠

١١ إذا كان قياس الزاوية الحادة بين المستقيم : س + كص − ٩ = ٠ ، ٣س − ٥ص + ٨ = ٠ يساوي $\frac{\pi}{٤}$ ، أوجد قيمة (ك)

١٢ أوجد قيمة (ك) إذا كان قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : س + كص − ٨ = ٠ و لمستقيم $\vec{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك(١ ، ٢) تساوي $\frac{\pi}{٤}$

١٣ إذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب حيث أ = (٢ ، ٣) ، ب = (٥ ، ٧) ، جـ = (١ ، ص) أوجد قيمة ص ثم أوجد قياس كل من الزاويتين الأخريين .

درس ٦ طول العمود المرسوم على خط مستقيم من نقطة

[illegible]

مثال (١٠) [illegible] المرسوم من النقطة (٢ ، -٥) [illegible] المستقيم [illegible] ك(١٢ ، ٥)

الحل

[illegible] ك(١٢ ، ٥)

[illegible] ، م = ٥ك وبسطنا

م = [illegible] = ٥س - ٥ = ١٢ص

[illegible] الصورة العامة: ٥س - ١٢ص + ٥ = ٠ الكارتيزية

[illegible] = $\frac{|٥ + ٥ - ٢ \times ١٢|}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}}$ = $\frac{٧٥}{١٣}$ وحدة طول

مثال (١١) [illegible] ٣س - ٤ص - ٧ = ٠ ، ٣س - ٤ص + ١١ = ٠

[illegible] وحدة [illegible]

الحل

[illegible] = $\frac{٣}{٤}$ ، م = $\frac{٣}{٤}$ ∴ المستقيمان متوازيان.

[illegible] ص = $\frac{-٧}{٤}$

[illegible] الأول ويكون س = ٠ ، ص = $\frac{-١١}{٤}$ [illegible] عن المستقيم الثاني

[illegible] = $\frac{|٣ \times ٠ - ٤ \times \frac{-١١}{٤} - ١١|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$ = $\frac{١٨}{٥}$ وحدة طول

تمرين (٢) : على طول العمود المرسوم على خط مستقيم من نقطة

أوجد طول الأعمدة من النقط المعينة إلى المستقيمات المقابلة من (١) إلى (٧)

(١) من النقطة [illegible] إلى المستقيم : ٢س - ٤ص + ٢ = ٠

(٢) من النقطة (١ ، -٢) [illegible] ٤س - ٣ص = ٠

(٣) من النقطة (١ ، ١) [illegible] ٥س + ١٢ص - ٦ = ٠

(٤) من النقطة (٢ ، ٤) إلى [illegible] س = ٣

(٥) من النقطة (٣ ، ٤) إلى [illegible] ص = ٣

(٦) من (٤ ، -٥) إلى الخط المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك(٤ ، ٣)

(٧) من (٢ ، ٠) إلى الخط المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك(٥ ، ١٢)

(٨) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٥ ، ٢) إلى الخط المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، -٣) ، (٤ ، ٠)

(٩) أوجد طول العمود من النقطة (٠ ، ٠) من الخط المستقيم المار بالنقطة (-٣ ، ٣) وميله $-\frac{٣}{٤}$

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٤ ، -٢) على المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٣) وميله $\frac{٥}{١٢}$

(١١) وجد طول العمود المرسوم من النقطة أ على الضلع $\overline{بجـ}$ من أضلاع المثلث اب جـ حيث أ = (٤ ، ٦) ، ب = (٢ ، ٣) ، جـ = (-٢ ، ٦)

(١٢) أثبت أن المستقيمين : ٥س + ١٢ص - ٩ = ٠ ، ١٠س + ٢٤ص + ٩ = ٠ متوازيان وأوجد البعد بينهما .

(١٣) ثبت أن المستقيمين : ٣س + ٤ص - ٥ = ٠ ، ٦س + ٨ص + ١٠ = ٠ متوازيان وأوجد البعد بينهما .

(١٤) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ك) على الخط المستقيم : ٢س + ص + ٤ = ٠ يساوي ٢$\sqrt{٥}$ وحدة طول أوجد (ك)

(١٥) اب جـ ء شبه منحرف فيه $\overleftarrow{أء}$ // $\overleftarrow{بجـ}$ فإذا كانت أ(٢ ، ١) ، ب(٥ ، ٣) ، جـ(١ ، ٦) ، ء(٤ ، ص) أوجد قيمة ص ثم أوجد مساحة شبه المنحرف اب جـ ء

درس ٧ المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

إذا كان لدينا مستقيمين $ل_١$: أ س + ب١ ص + جـ١ = ٠

، $ل_٢$: أ س + ب٢ ص + جـ٢ = ٠

فإن معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين هي :

أ س + ب١ ص + جـ١ + ك(أ س + ب٢ ص + جـ٢) = ٠ حيث ك ∈ ح

ك هي الثابت الموجود في المسألة في إيجاد قيمة (ك)

مثال (١) : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −١) وبنقطة تقاطع المستقيمين :

٧س + ص + ٣ = ٠ ، ٥س − ص − ٣ = ٠

الحل

الطريقة الأولى تعتمد على إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين

٧س + ص = −٣

٥س − ص = ٣

١٢س = ٠ ، س = ٠ ∴ ص = −٣

نقطة تقاطع المستقيمين (٠ ، −٣)

معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، −٣) ، (٢ ، −١)

وجد الميل أولا م = $\frac{-٣ - ١}{٠ - ٢} = \frac{-٢}{-٢} = ١$

معادلة المستقيم $\frac{ص - -١}{س - ٢} = ١$ ∴ ص + ١ = س − ٢

س − ص − ٣ = ٠

الطريقة الثانية. إيجاد قيمة (ك) حيث المعادلة هي :

٧س + ص + ٣ + ك(٥س − ص − ٣) = ٠ ..... (١)

(٢ ، −١) تمر بالمستقيم ∴ يحققه

١٤ + −١ + ٣ + ك(٥ × ٢ + −١ − ٣) = ٠ ∴ ٨ك = −١٦ ∴ ك = −٢

∴ ٧س + ص + ٣ − ٢(٥س − ص − ٣) = ٠

∴ ٣ص − ٣س + ٩ = ٠

بالقسمة على (−٣)

∴ **س − ص − ٣ = ٠**

تمرين (٧) : على المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

١ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٢) وبنقطة تقاطع المستقيمين :
س − ٤ص + ٥ = ٠ ، ٧ص + س − ١٧ = ٠

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١) وبنقطة تقاطع المستقيمين :
٣س − ٢ص + ٢٥ = ٠ ، ٢ص + ٥س − ٢٣ = ٠

٣ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :
٣س + ٢ص − ٧ = ٠ ، $\overline{م}$ = (−٢ ، ٠) + ك(٣ ، ٢) وبالنقطة (٣ ، ٤)

٤ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
$\overline{م}$ = ك(−٢ ، ٢) ، ٣س − ٢ص = ١٣ ويوازي محور الصادات .

٥ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين .
٢ص − س − ٢ = ٠ ، ٤ص + ٣س − ٢٤ = ٠ وعمودي على المستقيم الثاني

٦ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ص − ٢س + ١٥ = ٠ ،
٢ص + ٣س − ١٦ = ٠ ويوازي المستقيم : ص − ٣س + ١ = ٠

٧ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ص − س + ٢ = ٠ ،
٢ص + س + ١٠ = ٠ وعمودي على المستقيم : ٤س + ٣ص − ٨ = ٠

٨ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
ص − س − ٢ = ٠ ، ٢ص − ٣س − ٣ = ٠ وميله = $\frac{٢}{٣}$

٩ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين
٣ص − س − ١ = ٠ ، ص − ٢س + ١ = ٠ والموازي لمحور السينات .

١٠ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢س − ٣ص + ١٣ = ٠
٢ص + س − ٦ = ٠ ويقطع جزأين متساويين من المحورين .

١١ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
٢س + ٣ص − ٢ = ٠ ، ٣س − ص − ١٤ = ٠
والذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات زاوية قياسها ١٣٥°

المرشد

فى المراجعة العامة والنهائية فى الرياضيات

إرشادات تمارين الجبر وحساب المثلثات والهندسة التحليلية

للصف الأول الثانوى

إعداد

سعيد جودة

أولاً: حلول الجبر

إرشادات تمارين (١) على مفهوم ...

س = ٢ ، ع − ١ = ٥ ∴ ع = ٦

س + ١ = ٨ ∴ س = ٧

ك = ٤

٢س + ١ = ٥ ، ٢س = ٤ ∴ س = ٢

٣ص = ٣ ، ص = $\frac{٣}{٣}$

٤ل + ١ = ٣ ∴ ٤ل = ٢

ل = $\frac{١}{٢}$

٢ × $\frac{ع}{٢}$ = ٨ ، ل = ١٦

$\frac{ع}{٢}$ = ٢ ∴ ع = ٩

ب = ٦ ، أ + ب = ٨

أ + ٦ = ٨ ∴ أ = ٢

٢أس = ٤ ، ص = ٢

أ + ب = −٤

أ − ب = ٨

بالجمع ٢أ = ٤ ∴ أ = ٢

∴ ب = −٦

أ = ٢ ، ب = ٤

س + ص = ٦

س − ص = ٤

بالجمع ٢س = ١٠ ∴ س = ٥

∴ ص = ١

٢أس = ٢ ، س + ص = ٤ ∴ ص = ٢

أ + ٢ب = ١٠

أ − ب = ٥

بالطرح ٣ب = ٥ ∴ ب = $\frac{٥}{٣}$

أ = ٥ + $\frac{٥}{٣}$ = $\frac{٢٠}{٣}$

(٧) جـ = ٨ ، ٢أ = ٤

٢ب = جـ ، ٤أ = ب

٢ب = ٨ ∴ ب = ٤

٤أ = ب ∴ أ = $\frac{٤}{٤}$ = ١

∴ ء = ٢

(٨) ب = ٢ ، ٣جـ = ٦ ∴ جـ = ٢

أ + ب = ٤ب

∴ أ + ٢ = ٨ ∴ أ = ٦

ب − أ = ١٢ + ء

٢ − ٦ = ١٢ + ء ∴ ء = −١٦

(٩) ١٢أ + ١ = ٣ ∴ ١٢أ = ٢

أ = ١ ∵ ٣ب + أ = −١٤

٣ب = −١٤ − ١ ∴ ب = $\frac{-١٥}{٣}$ = −٥

∵ ٢ب + جـ = ٠ ∴ جـ = −٢ب

∴ جـ = −٢ × −٥ = ١٠

∴ ٢جـ + ء = ١٨

٢ × ١٠ + ء = ١٨ ∴ ء = ١٨ − ٢٠

∴ ء = −٢

(١٠) ١٥أ = ٤٥ ∴ أ = ٩ ، أ + ٢ب = ٤٩

٢ب = ٤٩ − ٩ = ٤٠

∴ ب = ٢٠

٢جـ = ٦ ∴ جـ = ٣

ء + ٥جـ = ٢٠ ⇐ ء + ١٥ = ٢٠

∴ ء = ٥

(١١) $\text{أ}^{-١} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$ (١٢) $\text{ب}^{-١} = \begin{pmatrix} ٢ & ٨ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$

(١٣) $\text{جـ}^{-١} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٨ & ٦ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$

إرشادات تمارين (٢) على جمع وطرح المصفوفات

(١) أولاً: أ + ٣ب

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 30 & 60 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

ثانياً: ٢أ + (−٥ب)

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 10 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -15 & -5 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 25 & 17 \end{vmatrix}$$

ثالثاً: ب + ٢جـ + (−أ)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

رابعاً: أ + (−٢ب) + (−٣جـ)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 18 & -12 \\ -15 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -18 & -15 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

(٢) أولاً: ٢جـ − ٣ب = أ

٣جـ = أ + ٣ب

$$3\text{جـ} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 14 \\ 9 & 18 \\ 12 & 21 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 15 & 30 \\ 9 & 6 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 17 & 14 & 11 \\ 22 & 19 & 10 \\ 9 & 24 & 39 \end{vmatrix}$$

$$\text{جـ} = \begin{vmatrix} 17/3 & 14/3 & 11/3 \\ 22/3 & 19/3 & 10/3 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix}$$

ثانياً: ٣جـ = أ − ٢ب

$$3\text{جـ} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & -4 & 2 \\ -12 & 6 & 4 \\ -20 & -10 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -9 & 0 & 9 \\ -10 & 10 & 12 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{جـ}^{-1} = \begin{vmatrix} -10/3 & -1/3 & 4 \\ 1/3 & 2/3 & -5/3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 10/3 & 1/3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \\ & & 3 \end{vmatrix}$$

ب − ٢أ = ٢ب

ب = ٢ب + −٢(أ)

$$\text{ب} = 2\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 12 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & -10 & -12 \\ -14 & -16 & -18 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 8 & 4 \\ -4 & -4 & 0 \\ -16 & -20 & 4 \end{vmatrix}$$

(٣) (أ) $\begin{vmatrix} \text{س}+1 & 5 \\ \text{ص}+5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}$

س + ١ = ٢ ، س = ١

ص + ٥ = ٣ ، ص = −٢

(ب) $\begin{vmatrix} \text{س}+2 & \text{ص}+3 & 4 & 3 \\ \text{ع}+4 & \text{ل}+5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

س + ٢ = ٤ ، س = ٢

ص + ٣ = −٣ ، ص = −٦

ع + ٤ = ٠ ، ع = −٤

ل + ٥ = ٥ ∴ ل = صفر

(جـ) $\begin{vmatrix} 4+2 & \text{س} & 61 & 9 \\ 3 & \text{ص}-4 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

س = ٩ ، ∴ ص = ١٢

(د) $\begin{vmatrix} \text{س}-4 & -3 & -5 \\ -7 & \text{ص}-8 & 0 \\ 6 & 8 & \text{ع}-1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -7 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

س − ٤ = ١ ∴ س = ٥

ص − ٨ = ١ ∴ ص = ٩

ع + ١ = ٤ ∴ ع = ٣

(٤) أولاً: جـ = ب + جـ + (−أ)

$$= \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

(٦) بفرض أن : ٣س + ٢ص = أ .. (١)

٢س − ٣ص = ب ..... (٢)

بضرب ٣ في العلاقة (١)

، ضرب ٢ في العلاقة (٢)

∴ ٩س + ٦ص = ٣أ

٤س − ٦ص = ٢ب

بالجمع ١٣س = ٣أ + ٢ب

$$\therefore ١٣س = ٣\begin{pmatrix} ١ & ١٢ \\ ١١ & ٥- \\ ٥ & ١٢- \end{pmatrix} + ٢\begin{pmatrix} ٥- & ٥ \\ ٣ & ١٤ \\ ١٤- & ٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٣ & ٣٦ \\ ٣٣ & ١٥- \\ ١٥ & ٣٦- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٠- & ١٠ \\ ٦ & ٢٨ \\ ٢٨- & ١٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ١٣ & ٢٦ \\ ٣٩ & ١٣ \\ ١٣- & ٢٦- \end{vmatrix}$$

$$\therefore س = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \\ ١- & ٢- \end{pmatrix}$$

∴ من العلاقة (١) : ٢ص = أ − ٣س

٢ص = أ + (−٣)س

$$٢ص = \begin{pmatrix} ١ & ١٢ \\ ١١ & ٥- \\ ٥ & ١٢- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣- & ٦- \\ ٩- & ٣- \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$$

$$٢ص = \begin{pmatrix} ٢- & ٦ \\ ٢ & ٨- \\ ٨ & ٦- \end{pmatrix} ، ص = \begin{pmatrix} ١- & ٣ \\ ١ & ٤- \\ ٤ & ٣- \end{pmatrix}$$

(٧) بضرب العلاقة الثانية × ٢

س ٢ ٢

أ ص ٣ (١)

٢س+٨ ٢

= ٢ص+١٢ = (٠)

٢س + ٨ = ٢ ، ٢س = −٦

س = −٣

٢ص + ١٢ = ٠ ، ص = −٦

(٢ ٤ / ٦ ٨) · (س ٤ / ٦ ص)

س = ٢ ، ص = ٨

(٢س+٨ ، ٥+٢ص ، ٤+٤ص)

أ س+٨ ٥+٢ص ٤٥

٣١ ١٩ ١٢٠

س + ٨ ٣ س −٥

٥ + ٢ص ١٢ ٢ص ١٢

ص ٦

٤٥ −٢٠ ٤ −٤

س ٤ ٢ ٤

ص ٨ ٤ ٢

٢س ١٢ ٤س−١٦

٢ص−٣٢ ٤ص−١٢

ب أ = ٢ ٤ س ٤

−٤ ٢ ص −١٠

= ٢س−٤ص ٢٤

٤س+٢ص −٣٢

أب = ب أ

٢س − ١٦ = ٢س + ٤ص (١)

ص = −٤

٤س + ٨ = −٢٤ ، ٤س = −٣٢

س = −٨

(٦) أ = (٦ ٤− / ٩− ٦) (٦ ٤− / ٩ ٦) = (٣٦−٣٦ ، ٢٤+٢٤− / ٥٤ ٥٤ ، ٣٦+٣٦−) = (٠ ٠ / ٠ ٠)

= ☐ ، أ = ☐

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \\ 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \\ 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{١٢} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{١٠} = |\text{أ}|$$

$$\text{(٩)}\ \text{أ}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 2-0 & 3+2 \\ 0-1 & 1-0 & 1-0 \\ 0-3+1 & 0-2+2 & 3-2+0 \end{vmatrix}$$

$$\text{أ}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{(٨)}\ \text{أ}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{8}{25} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{25} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{25} \end{vmatrix}$$

$$\text{أ}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{25} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{9}{25} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{9}{25} \end{vmatrix} = \text{I}$$

$$\text{م}^{2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\text{م}^{3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3+2-6 & 2+0-6 & 2+3 \\ -2-3 & -2 & -1 \\ -2+3+4 & -2+0+8 & -1+0+10 \end{vmatrix}$$

$$\text{م}^{3} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ -2 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\text{م}^{3} - \text{م}^{2} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{(١٠)}\ \text{أ ب} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 10 & 5 & 5 \\ 8 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2+20-8 & -5+10-5 & 7+10-3 \\ -2+25-48 & -5+25-30 & -7+35-18 \\ 2+15-33 & -5+15-20 & 7+15-12 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10\ \text{I} = \text{الأيسر}$$

$$\text{(١١)}\ \text{أ ب} = \frac{1}{11} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -5 & 8 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{11} \begin{vmatrix} -25-24 & 35-56 \\ -25+30 & 40-56 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{11} \begin{vmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{أ ب} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -15+3 & 25-1 \\ -40+21 & 35-14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 24 \\ 11 & 21 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ \text{س}^{2} = \text{أ ب} + \text{أ}$$

$$= \begin{vmatrix} -12 & 24 \\ 17 & 21 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\text{س}^{2} = \begin{vmatrix} -13 & 17 \\ -19 & 24 \end{vmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{vmatrix} -13 & -19 \\ 17 & 24 \end{vmatrix}$$

$$\text{١٢ أ ب} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3+18+8 & 30 & 6+18 \\ 3+3 & 5 & 1+18 \\ 5+27+12 & 45 & 9+30 \end{vmatrix}$$

$$\text{ب + أ ب} = \begin{vmatrix} 29 & 30 & 24 \\ 6 & 5 & 19 \\ 44 & 45 & 39 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{س}^{2} + 2\text{س} = \text{أ ب} + 2\text{ب}$$

$$= \begin{vmatrix} 31 & 30 & 36 \\ 10 & 5 & 19 \\ 50 & 55 & 41 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (1)$$

بحد مدور الطرفين

$$\text{س} + 2\text{س}^{2}$$

$$- \begin{vmatrix} 31 & 10 & 50 \\ 30 & 5 & 55 \\ 36 & 19 & 41 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (2)$$

بضرب العلاقة الأولى في −2 وجمعها على العلاقة (2)

$$\therefore\ -3\text{س} = \begin{vmatrix} -31 & -50 & -22 \\ 10 & -5 & 17 \\ -64 & -91 & -41 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ \text{س} = \begin{vmatrix} \frac{31}{3} & \frac{50}{3} & \frac{-22}{3} \\ \frac{-10}{3} & \frac{5}{3} & \frac{17}{3} \\ \frac{-64}{3} & \frac{91}{3} & \frac{41}{3} \end{vmatrix}$$

(١٤) أولاً: $3\text{س} - 5\text{س}^{2} = \text{أ}^{2} - 2\text{أ} + \text{ب}^{2}$

$$\cdot\ 2\text{أ} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4-5 & -2-3 \\ 10+15 & -5+9 \end{vmatrix}$$

$$\text{أ}^{2} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 25 & 4 \end{vmatrix} ،\ -2\text{أ} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -10 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\text{ب}^{2} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ 3\text{س} - 5\text{س}^{2} = \text{أ}^{2} - 2\text{أ} + \text{ب}^{2}$$

$$\therefore\ 3\text{س} - 5\text{س}^{2} = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 19 & -5 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (1)$$

(١) ..... $\begin{vmatrix} -٢٦ & ٤ \\ ٢٦ & ٠ \end{vmatrix}$ =

∴ محدد الطرفين

∴ س + ٥س = ٠

(٢) ..... $\begin{vmatrix} ٢٦ & ١٤ \end{vmatrix}$ =

نضرب (١) × −٥ ونجمع على (٢)

−٥س − ٢٥س + س + ٥س = ٠

$\begin{vmatrix} ٠ & ٢٦ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١٣٠ & ٧٠ \\ ١٣٠- & ٠ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ٠ & ٢٦ \\ ٢٦ & ١٤ \end{vmatrix}$

$-٢٤س - \begin{vmatrix} ٧٠ & ١٠٤ \\ ١٠٤- & ١٤ \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} \frac{٣٥}{١٢} & \frac{١٣-}{٣} \\ \frac{١٣}{٣} & \frac{٧-}{١٢} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٧٠ & ١٠٤ \\ ٢٤ & ٢٤ \\ ١٠٤ & ١٤- \\ ٢٤ & ٢٤ \end{vmatrix} - س$

(١٥) $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٤- & ٢ \end{vmatrix} = ٦$

$\begin{vmatrix} ٤ & ٨ & ٢- & ٤+٤ \\ ٨ & ١٦ & ٨- & ٤+٤ \end{vmatrix} = -$

$\begin{vmatrix} ٤ & ٨- \\ ٨- & ١٦ \end{vmatrix} = ٤-$

$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٠ + ٠(-٤)$ = □

(١٦) $\begin{vmatrix} ٣- & ٢ \\ ٢ & ١- \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ٢ & ٣- \\ ١- & ٢ \end{vmatrix} = ٦$

$\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١٢ & ٨- \\ ٨ & ٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١٢ & ٧ \\ ٧ & ٤- \end{vmatrix} + ٠(-٤) + ٠$

$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ = □

$\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ١- \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ١- \end{vmatrix} = ٦$

$\begin{vmatrix} ٧ & ٨ \\ ١٥ & ٧- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٤+٣ & ١-٤ \\ ١٦+١- & ٤-٣- \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} ٧- & ٢١- \\ ٢٨- & ٧ \end{vmatrix} = ١٧-$

$\begin{vmatrix} ٠ & ١٣ \\ ١٣ & ٠ \end{vmatrix} = ٢$

$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ − □ = ١٣ + ١(−٧) + ٢

(١٨) $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٦- & ١ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٦- & ١ \end{vmatrix} = ٢$

$\begin{vmatrix} ٢٠- & ٩ \\ ٤١ & ٤- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣٠-١٠ & ٥+٤ \\ ٣٦+٥ & ٦-٢ \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} ٢٠+ & ٨+ \\ ٢٤- & ٤+ \end{vmatrix} = ١$

$\begin{vmatrix} ٠ & ١٧- \\ ١٧- & ٠ \end{vmatrix} = ١٧-$

(١٩) $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ٢$

$\begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ٠+٢ & ٦+١ \\ ٠+٦ & ٠+٣ \end{vmatrix} -$

$\begin{vmatrix} ٢- & ١- \\ ٠ & ٣- \end{vmatrix} = -١$

$\begin{vmatrix} ٠ & ٦- \\ ٦ & ٠ \end{vmatrix} = ١٦-$

∴ ٢ + (−١) + (−٦) ١

$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ = □

إرشادات تمارين (٤) على المحددات

(١) ١٠ (٢) ٢ (٣) ١٢ − ١٠ = ٢

(٤) صفر (٥) ١٤ − ١٥ = −١

(٦) −١ − ٦ = −٧ (٧) −٤٢ + ٥٧ = ١٥

(٨) ب(أ + س) − أ(ب + ص)

= ب أ + ب س − أ ب − أ ص

= ب س − أ ص

(٩) (س+١)(ص²+١)−(س²+١)(ص+١)

= س ص² + س + ص² + ١

− س² ص − ص − س² − ١

= س ص² + س + ص²

− س² ص − ص − س²

(١٠) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ١ & ٢ \\ ١- & ٤ & ٤ & ١- & ٤ \\ ٠ & ٧ & ٨ & ٠ & ٧ \end{vmatrix}$

= ٣٢ − ٢١ − ٢٨ + ١٦ = −١

إرشادات تمارين (٥) على حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

(١) م . ح = {(٦ ، ٢)}

(٢) م . ح = {(٤/٥ ، −٩/٥)}

(٣) م . ح = {(٠ ، ٠)}

(٤) م . ح = {(٢/٧ ، ١٠/٧)}

(٥) م . ح = {(−٢/٧ ، ١/٧)}

(٦) م . ح = {(−١ ، ٢ ، ٣)}

(٧) م . ح = {(٠ ، −١ ، ٠)}

(٨) م . ح = {(١ ، ٢ ، −٢)}

(٩) م . ح = {(٢ ، ٢ ، ٠)}

(١٠) م . ح = {(٥/٣ ، ٦٥/١٢ ، −١١/١٢)}

إرشادات تمارين (٦) على المعكوس الضربي للمصفوفة

(١) ا = ٨ ≠ ٠ له معكوس

$$\text{ا}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(١٣) |ا| − ٣ = ٠

∴ ا² − ٢ا − ٣ = ٠

(ا − ٣)(ا + ١) = ٠

∴ ا = ٣ ، ا = −١

∴ قيم ا التي تجعل للمصفوفة ليس لها معكوس ضربي هي {٣ ، −١}

(١٤) ∵ ا × $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ = ا

كل منهما معكوس للآخر .

∴ ا = $\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(١٥) س معكوس ضربي للمصفوفة $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

∴ س = $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

(١٦) Δ − س ص + ٠ × −س ص

= س ص ≠ ٠

∴ ب⁻¹ = $\frac{1}{\text{س ص}}\begin{pmatrix} \text{ص} & \text{س ص} \\ 0 & \text{س} \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} \frac{1}{\text{س}} & 1 \\ \frac{1}{\text{ص}} & 0 \end{pmatrix}$

(١٧) م . ح = {(٣ ، −١)}

(١٨) م . ح = {(−١ ، ٢)}

(١٩) م . ح = {(٢ ، ٦)}

(٢٠) م . ح = {(٥ ، ١)}

(٢١) م . ح = {(١ ، ١)}

إرشادات الوحدة الثانية

إرشادات تمارين (١)

بالقسمة على ٣

س ≤ ٢

س ≤ ١

م ح =]-∞ ، ١]

س > -١

م ح =]-١ ، ∞[

س > ٢

م ح =]٢ ، ∞[

بالقسمة على ٣

س > -١/٣

م ح =]-١/٣ ، ∞[

س < -٢ ، س > -٥ + ٣

س < -٢

م ح =]-∞ ، -٢[

س ≤ ٤

س ≤ ٤/٥

م ح =]-∞ ، ٤/٥]

س ≥ ٧ بالقسمة على ٣

س ≥ ٧/٣

م ح = [٧/٣ ، ∞[

س + ١ ≥ س ، ٢س − س ≥ −١

س ≥ −١

م ح = [−١ ، ∞[

س − ١ ≤ س + ٨

س − س ≤ ١٢

س ≤ ١٢ بالقسمة على ٢

م ح [٠ ، ٦]

(٩) س − ١ ≤ ٣س − ٥

٥ − ١ ≤ ٣س − س

٤ ≤ ٢س بالقسمة على ٢

٢ ≤ س

م ح [٢ ، ∞[

(١٠) ٤ < س < ٦ م . ح [٤ ، ٦]

(١١) −١ − ٢ < −س < ٢ − ٢

−٣ < −س < ٠ بالضرب × −١

٣ > س ≥ ٠

م ح = [٠ ، ٣[

(١٢) −٣ < ٤س + ٥ ≤ ٧

−٣ − ٥ < ٤س ≤ ٧ − ٥

−٨ < ٤س ≤ ٢ بالقسمة على ٤

−٢ < س ≤ ١/٢

م . ح =]−٢ ، ١/٢]

(١٣) س − ١ < ٢س − ٥ < س + ٥

بإضافة (−س) للأطراف

س − ١ − س < ٢س − ٥ − س < س + ٥ − س

∴ −١ < س − ٥ < ٥ بإضافة ٥ للأطراف

−١ + ٥ < س − ٥ + ٥ < ٥ + ٥

∴ ٤ < س < ١٠ ∴ م . ح =]٤ ، ١٠[

(١٤) ٣س − ٦ < ٢س + ٦ ≤ ٣س + ١٨

(٢) ص ≤ ١

٠	١
١	٠

(٠ ، ١)

∈ مجموعة الحل

الجزء المظلل هو مجموعة الحل

ونقطة المستقيم س = ٣ لا تنتمي للحل

ومجموعة نقط مستقيم ص = ١ تنتمي للحل

(٣) ص > −٣

٠	−٣
١	٠

(٠ ، ٠)

∉ مجموعة الحل

ومجموعة نقط مستقيم ص = −٣ لا تنتمي إلى الحل

س > ص

٠	٠
٣	٣

∉ مجموعة الحل

الجزء المظلل هو مجموعة الحل

ومجموعة نقط مستقيم س = ص لا تنتمي للحل

س − ص = ٥

٠	٥
٥	٠

∈ مجموعة الحل

الجزء المظلل هو مجموعة الحل

ونقطة المستقيم ٢س + ٣ص = ٦ ليست من مجموعة الحل

(٩) ٢س + ٥ص = ١٠

س	٠	٥
ص	٢	٠

(٠ ، ٠)

∈ مجموعة الحل

مجموعة الحل هي الجزء المظلل

ونقطة المستقيم ليست من مجموعة الحل

١٠ ٥س − ٣ص = ٠

س	٠	١
ص	٠	$\frac{٥}{٣}$

المستقيم يمر بالنقطة

عوض في النقطة

٠ ، ٣

٥ × ٠ − ٣ × ٠ ≠ ٠

∉ مجموعة الحل

الجزء المظلل هو مجموعة الحل

ونقطة المستقيم ∉ مجموعة الحل

س − ص = ٤

٠	٤
٤	٠

٠ ≠ ٤

∉ مجموعة الحل

الجزء المظلل هو مجموعة الحل

ونقطة المستقيم س − ص = ٣ من مجموعة الحل

س − ص = ٠

٠	٠
٠	٠

٠ = ٠

∈ مجموعة الحل

٣س − ٢ص = ٠

٠ ، ٠

∈ مجموعة الحل

مجموعة الحل هي

ونقطة المستقيم ∈ مجموعة الحل

س − ص = ٥

٠	٥
٥	٠

٠ ، ٥

∈ مجموعة الحل

الجزء المظلل هو مجموعة الحل

ونقطة المستقيم س = ص لا تنتمي للحل

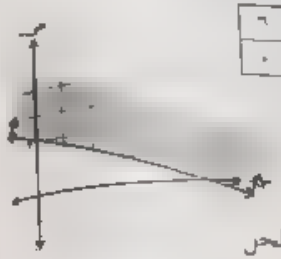
أضعف تمهيز (٢)

(١٥) ص ≤ ٢ − س/٣ بضرب × ٣

٣ص ≤ ٦ − س

٣ص + س ≤ ٦

س	٠	٦
ص	٢	٠



٠ ∉ ٦

(٠ ، ٠)

لا تنتمي

لمجموعة الحل

مجموعة الحل هو الجزء المظلل

وقط المستقيم تنتمي إلى مجموعة الحل

إرشادات تمارين (٢)

(١) (أ) س − ص = ١

س	٠	١
ص	−١	٠

٠ ∉ ١

(٠ ، ٠)

لا تنتمي

إلى مجموعة

الحل

لمتباينة س − ص < ١

(ب) س + ص < ٣

س	٠	٣
ص	٣	٠

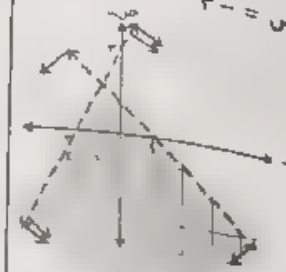
٠ < ٣ ∴ (٠ ، ٠) تنتمي إلى مجموعة حل المتباينة س + ص < ٣

حل المتباينتين معًا هو الجزء المظلل ، لاحظ أن نقط المستقيمين لا تنتمي إلى مجموعة الحل

∴ نقطة تقاطع المستقيمين (٢ ، ١)

(١) (أ) ٢س − ص = ٣

س	٠	٣/٢
ص	٣	٠



٠ ∈ (٠ ، ٠)

مجموعة حل

المتباينة

٢س − ص > −٣

−١س + ص = ١

س	٠	١
ص	١	٠

(٠ ، ٠) ∈ لمجموعة حل المتباينة

س + ص < ١

الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينتين

مجموعة نقط المستقيمين ∉ مجموعة الحل

ملحوظة : نقطة التقاطع هي (−٢/٣ ، ٥/٣)

(ب) (أ) س + ٣/٤ ص > −٣ بالضرب × ٤

٤س + ٣ص > −١٢

٤س + ٣ص = −١٢

س	٠	−٣
ص	−٤	٠

٠ > −١٢

(٠ ، ٠) ∈

لمجموعة حل

المتباينة :

٤س + ٣ص > −١٢

(ب) بالضرب × ٥ ∴ ٥س − ٢ص > −٥

٥س − ٢ص = ٥

س	٠	−١
ص	٥/٢	٠

٠ > −٥ ∴ (٠ ، ٠) ∈ لمجموعة حل المتباينة ٥س − ٢ص > −٥

ملحوظة نقطة التقاطع هي (−٣٩/٢٢ ، −٤٠/٢٢)

الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينتين ، لاحظ أن نقط المستقيمين لا تنتمي إلى مجموعة الحل

(٤) (أ) س = ص عوض عن س = ٣ ،

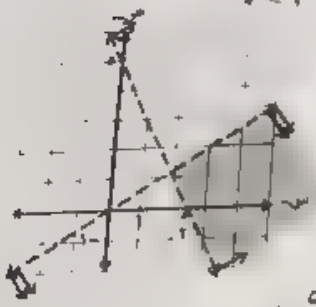
ص = ٠ ٣ > ٠

(٣ ، ٠)

∈ لمجموعة

حل المتباينة .

س − ص > ٠



(ب)

٢س + ص < ٥

س	٠	٥/٢
ص	٥	٠

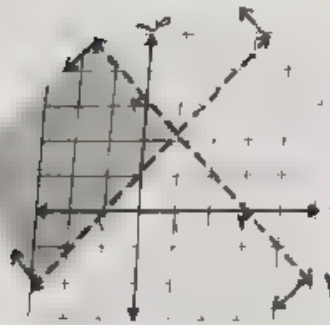
(٠ ، ٠) ∉ مجموعة حل المتباينة : ٢س + ص < ٥

الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينتين معًا ، والجزأن من المستقيمين من الجزء المظلل لا ينتمي إلى مجموعة حل المتباينتين

نقطة تقاطع المستقيمين (٥/٣ ، ٥/٣)

(٥) (أ) س + ص = ٣

س	٠	٣
ص	٣	٠



(٠ ، ٠) ∈

مجموعة الحل

للمتباينة :

س + ص < ٣

(ب) س − ص = −١

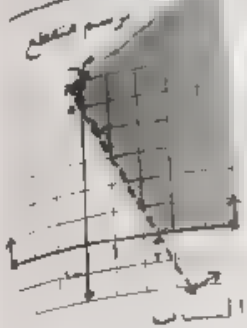
س	٠	−١
ص	١	٠

لاحظ أن نقطة تقاطع

(٨) ٢س + ص < ٥

س	٠	١
ص	٥	٠

برسم متقطع



(٠ ، ٠) ∉ مجموعة حل المتباينة .

٢س + ص < ٥

ص = ٠ هو محور السينات

الجزء المظلل هو حل المتباينتين معًا

نقط المستقيم ∉ إلى الحل

(٩) س − ٢ص = ٣

س	٠	٣
ص	$-\frac{٣}{٢}$	٠

برسم متقطع

∈ (٠ ، ٠) مجموعة حل المتباينة .

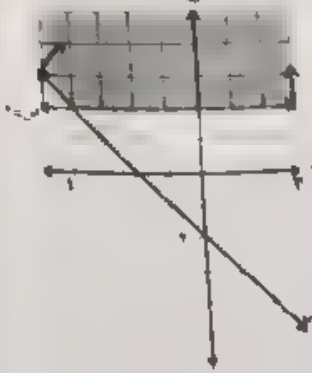
س < ٣ + ٢ص

س = ٠ هو محور الصادات

الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينة س

(١٠) ص = ٢

برسم متقطع



(٠ ، ٠) ∉ مجموعة حل المتباينة

ص < ٢

س + ص = −٢

س	٠	−٢
ص	−٢	٠

برسم متصل

∈ (٠ ، ٠) مجموعة حل المتباينة

س − ص ≤ −٢

ص ≥ س + ٢

نقط التقاطع (−٤ ، −٢)

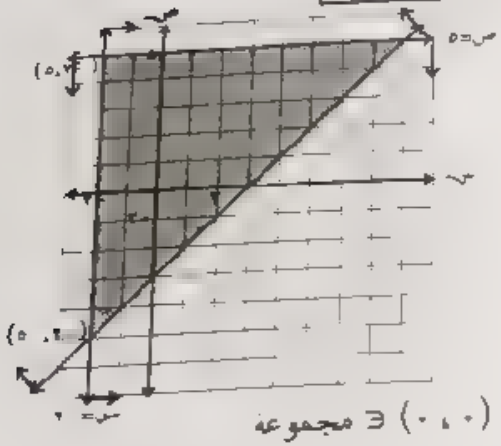
الجزء المظلل هو حل المتباينتين معًا

(١٢) س = −٢ يرسم موازيًا لمحور الصادات

برسم متصل ، ص = ٥ يرسم موازيًا لمحور السينات ، يرسم متصلا

س − ص = ٣ برسم متصل

س	٠	٣
ص	−٣	٠



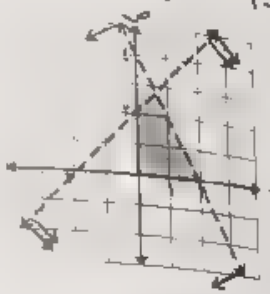
∈ (٠ ، ٠) مجموعة حل المتباينة : س − ص ≥ ٣

لاحظ أن تقاطع س − ص = ٣ مع ص = ٥ هي (٨ ، ٥) وتقاطع س − ص = ٣ مع س = −٢ هي (−٢ ، −٥)

الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينات

(١٣) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ تعني الحل يقع في الربع الأول

برسم متقطع



∈ (٠ ، ٠) مجموعة حل المتباينة

س + ص < ٢

ص > س + ٢

ص + ٢س = ٤ يرسم متقطع

س	٠	٢
ص	٤	٠

∈ (٠ ، ٠) مجموعة حل المتباينة :

ص + ٢س < ٤

نقط التقاطع $(\frac{٢}{٣} ، \frac{٨}{٣})$

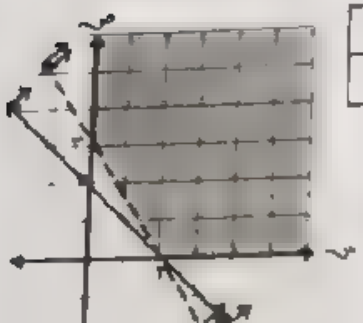
الجزء المظلل هو حل المتباينات

لاحظ أن نقطة التقاطع لا تنتمي إلى مجموعة الحل للمتباينات

(١٤) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ تعني الحل يقع في الربع الأول

(أ) ٣س + ٢ص = ٦ يرسم متقطع

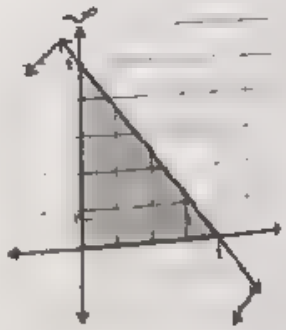
س	٠	٢
ص	٣	٠



∉ (٠ ، ٠) مجموعة حل المتباينة :

س + ص ≥ ٤ يرسم متصل

س	٠	٤
ص	٤	٠

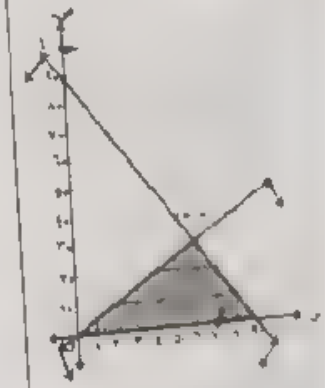


∈ (٠ ، ٠) مجموعة حل المتباينة

س + ص ≥ ٤

الجزء المظلل هو مجموعة حل ال

إرشادات تمارين (٤)



(٠ ، ٠) صفر

ق(٦٠ ، ٣٠) ٥ × ٦٠ + ٣٠ × ٧

٣٠٠ + ٢١٠ = ٥١٠ أكبر قيمة

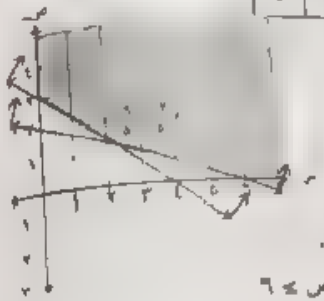
ق(٩٠ ، ١٠) ٥ × ٩٠ + ٧ × ٠ = ٤٥٠

أكبر قيمة عند (٦٠ ، ٣٠) وتساوى ٥١٠

(٢) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ حيث ان مجموعة الحل تقع فى الربع الأول

(أ) س + ٣ص = ٦ برسم متصلا

س	٠	٦
ص	٢	٠



(٠ ، ٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :

س + ٣ص ≤ ٦

(ب) ٣س + ٤ص = ١٢ برسم متصلا

س	٠	٤
ص	٣	٠

(٠ ، ٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :

٣س + ٤ص ≤ ١٢

نقطة تقاطع المستقيمين هى $(\frac{٦}{٥} ، \frac{١٢}{٥})$

الجزء المظلل هو حل المتباينات معًا

رؤوس مضلع الحل هى :

(٠ ، ٦) ، (٣ ، ٠) ، $(\frac{٦}{٥} ، \frac{١٢}{٥})$

∴ ق(٠ ، ٦) = ٦ × ٥ + ٠ × ١٠ = ٣٠

ق(٣ ، ٠) = ٠ × ٥ + ٣ × ١٠ = ٣٠

ق$(\frac{٦}{٥} ، \frac{١٢}{٥})$ = $\frac{١٢}{٥}$ × ٥ + $\frac{٦}{٥}$ × ١٠

= ١٢ + ١٢ = ٢٤

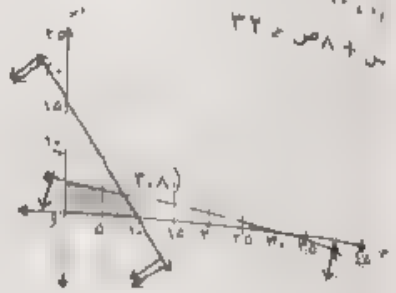
أصغر قيمة عند $(\frac{٦}{٥} ، \frac{١٢}{٥})$ وتساوى ٢٤

(أ) ٣س + ٨ص = ٣٢ برسم متصلا

س	٠	٣٢
ص	٤	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة الحل المتباينة

س + ٨ص ≤ ٣٢



(ب) ١٢س + ٨ص = ١٢٠

بقسمة على ٤

٣س + ٢ص = ٣٠ برسم متصلا

س	٠	١٠
ص	١٥	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :

١٢س + ٨ص ≤ ١٢٠

نقطة التقاطع (٨ ، ٣)

رؤوس مضلع الحل هى :

(١٠ ، ٠) ، (٠ ، ٠) ، (٨ ، ٣) ، (٠ ، ٤)

ق(١٠ ، ٠) = ٢٥ × ١٠ = ٢٥٠

ق(٠ ، ٠) = صفر

ق(٨ ، ٣) = ٢٥ × ٨ + ٤٥ × ٣

= ٢٠٠ + ١٣٥ = ٣٣٥

ق(٠ ، ٤) = ٢٥ × ٠ + ٤٥ × ٤ = ١٨٠

أكبر قيمة عند (٨ ، ٣) وتساوى ٣٣٥

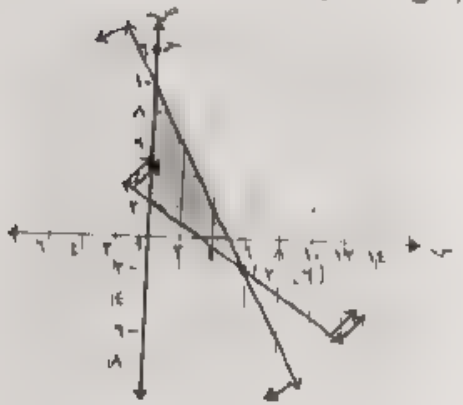
وأصغر قيمة عند (٠ ، ٠) وتساوى صفرًا

(أ) ٣ص + ٢س = ٦ برسم متصلا

س	٠	٣
ص	٢	٠

(٠ ، ٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :

٣س + ٢ص ≤ ٦



(ب) ٢س + ص = ١٠ برسم متصلا

س	٠	٥
ص	١٠	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :

نقطة التقاطع هى (٦ ، −٢)

الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينات

رؤوس مضلع الحل هى :

(٥ ، ٠) ، (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٢) ، (٠ ، ١٠)

ق(٥ ، ٠) = ٥ × ٢ + ٣ × ٠ + ٥ = ١٥

ق(٣ ، ٠) = ٣ × ٢ + ٣ × ٠ + ٥ = ١١

ق(٠ ، ٢) = ٠ × ٢ + ٣ × ٢ + ٥ = ١١

ق(٠ ، ١٠) = ٠ × ٢ + ٣ × ١٠ + ٥ = ٣٥

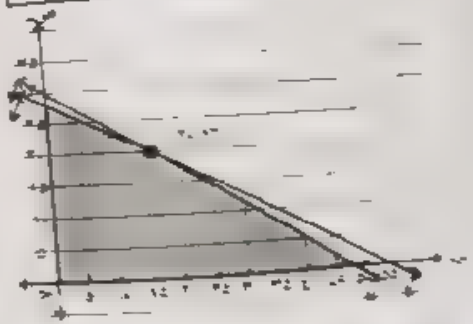
∴ أكبر قيمة عند (٠ ، ١٠) وتساوى ٣٥

وأصغر قيمة عند (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٢)

وتساوى ١١

إرشادات تمارين (٥)

النوع / المتطلبات	ريوش طلاء	حرير	انتاج
عدد كمية أ	$\frac{5}{2}$	٤	١٢٠
عدد كمية ب	$\frac{5}{2}$	٥	١٤٠
عدد المفروض	س	ص	
الربح	٣	٥	



الهدف: ر = ٣س + ٥ص

بحيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

$\frac{5}{2}$س + ٤ص ≥ ١٢٠ ، $\frac{5}{2}$س + ٥ص ≥ ١٤٠

الحل المقبول: س = ١٢ ، ص = ٢٠

عدد المكيال كمية مكيال

المضلع الحل هو

(٣ ، ٠) ، (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٣) ، (٠ ، ٠)

(٠ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٠)

ر(٠ ، ٣) = ٣ + ٠ − ٥ = −٢

ر(٣ ، ٤) = ٣ − ١٢ − ٥ = −١٤

ر(٤ ، ٠) = ٠ − ١٢ − ٥ = −١٧

أصغر قيمة

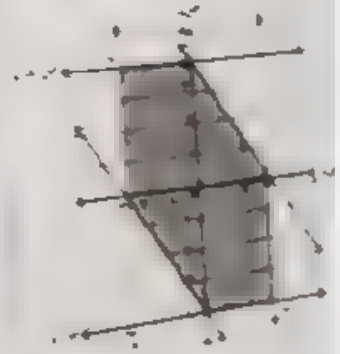
ر(٠ ، ٣) = ٣ − ٥ = −٨

ر(٣ ، ٤) = ٣ + ١٢ − ٥ = ٤

ر(٤ ، ٠) = ٠ + ١٢ − ٥ = ٧ أكبر قيمة

س	٠	٣
ص	٤	٠

س	٠	٢٠
ص	٠	٠



الحل هي (٢٨ ، ٠) ، (٠ ، ٠)

ر(٢٨ ، ٠) = ١٠٠ × ٢٨ = ١٤٨

ر(٠ ، ٠) = ٠ + ٤٨ × ٠ = ١٤٤

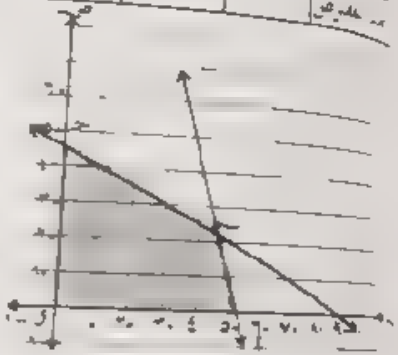
ر(٢٨ ، ٠) = ٢٨ × ٥ + ٠ = ١٤٠

أكبر قيمة عند (١٦ ، ٢٠)

عدد علب زيوت الطلاء = ١٦ ،

عدد علب الوريش = ٢٠

النوع / المتطلبات	سفرة	مطبخ	انتاج
عدد كمية أ	١	٢	٩٠
عدد كمية ب	٣	١	١٥٠
عدد المفروض	٢٠٠	١٠٠	
الربح	س	ص	



الهدف

ر = أ = ٢٠٠س + ١٠٠ص

بحيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ص ≤ ٩٠

٣س + ص ≤ ١٥٠

عدد المفروض:

س + ٢ص = ٩٠ ، ٣س + ص = ١٥٠

عدد المفروض هي (٤٢ ، ٢٤)

ر = ٢٠٠ × ٤٢ + ١٠٠ × ٢٤

= ٨٤٠٠ + ٢٤٠٠ = ١٠٨٠٠

ر = ٥٠ × ٢٠٠ = ١٠٠٠٠

ر = ٠ + ٤٥ × ١٠٠ = ٤٥٠٠

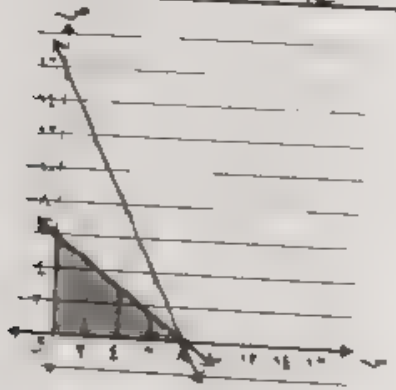
ر = ٠

أكبر قيمة عند (٤٢ ، ٢٤)

عدد السفرة = ٤٢ ، عدد المطبخ = ٢٤

(٣)

النوع / المتطلبات	طراز أ	طراز ب	انتاج
الخشب	٢	١	١٦
المساعدة	٦	٨	٤٨
ثمن البيع	١٢٠٠	٨٠٠	
عدد المفروض	س	ص	



دالة الهدف:

ر(س ، ص) = ١٢٠٠س + ٨٠٠ص

المحدود: س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

٢س + ص ≤ ١٦ ، ٦س + ٨ص ≤ ٤٨

عدد رسم المتباينتين نجد أن نقطة

تقاطعهما ٨ ، ٠

رؤوس المضلع الحل هي ٨ ، ٠

ثانيا: حلول حساب المثلثات

تمرين حساب المثلثات (٢)

المجموعة (١):

(١) [أ] ١ معدله ، [ب] معدله
[جـ] معدله ، [د] معدله
[هـ] معدله ، [و] معدله
معدله

(٢) جا² θ + جتا² θ + جا² θ جتا² θ
= جا² θ + جتا² θ (جا² θ + جتا² θ)
= جا² θ + جتا² θ × ١ = ١

[أ] $\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta} = \frac{\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$

= $\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta} + \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$

= ١ + قتا² θ

[ب] $\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} = \frac{\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}$

= $\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} + \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}$

= قا² θ + ١

[جـ] $\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta} = \frac{\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$

= $\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta} + \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$

= ١ + ظتا² θ

[د] $\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} = \frac{\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}$

= $\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} + \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}$

= ظا² θ + ١

(٣) [أ] لطرف الأيمن

= $\frac{\text{قا}^2\theta}{\text{قا}^2\theta} = \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$ = جا² θ = الأيسر

[ب] لطرف الأيمن = $\frac{\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} + \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}}{\frac{١}{\text{جا}\theta} \times \frac{١}{\text{جتا}\theta}}$

= جا θ جتا θ $\left(\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} + \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}\right)$

= جا² θ + جتا² θ = ١ = الأيسر

[جـ] لطرف الأيمن = $\left(\frac{١}{\text{جتا}\theta} - \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}\right)^2$

= $\left(\frac{١ - \text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}\right)^2$

= $\frac{(١ - \text{جا}\theta)^2}{\text{جتا}^2\theta} = \frac{(١ - \text{جا}\theta)^2}{١ - \text{جا}^2\theta}$

= $\frac{(١ - \text{جا}\theta)^2}{(١ - \text{جا}\theta)(١ + \text{جا}\theta)}$

= $\frac{١ - \text{جا}\theta}{١ + \text{جا}\theta}$ = الأيسر

[د] لطرف الأيمن

= $\frac{١ - \text{جتا}^2\theta - \text{جا}^2\theta + \text{جا}^2\theta\,\text{جتا}^2\theta}{\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}}$

= $\frac{١ - (\text{جتا}^2\theta + \text{جا}^2\theta) + \text{جا}^2\theta\,\text{جتا}^2\theta}{\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}}$

= $\frac{\text{جا}^2\theta(١ - \text{جا}^2\theta\,\text{جتا}^2\theta)}{\text{جا}^2\theta}$

= $\frac{\text{جا}^2\theta\,\text{جا}^2\theta\,\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$

= جا² θ جتا² θ = الأيسر

[هـ] لطرف الأيمن = $\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} + \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$

= $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} \times \frac{\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta} + \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} \times \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

= $\frac{\text{جا}^2\theta\,\text{جا}\theta + \text{جتا}^2\theta\,\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta}$

= $\frac{\text{جا}^2\theta\,\text{جا}\theta + \text{جتا}^2\theta\,\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta}$

= جا² θ + جتا² θ = ١ = الأيسر

المجموعة (ب):

(١) الأيمن =

$\frac{(\text{جتا}^2\text{جـ} - \text{جا}^2\text{جـ})(\text{جتا}^2\text{جـ} + \text{جا}^2\text{جـ})}{(\text{جتا جـ} + \text{جا جـ})}$

= $\frac{(\text{جتا جـ} - \text{جا جـ})(\text{جتا جـ} + \text{جا جـ})}{(\text{جتا جـ} + \text{جا جـ})}$

= جتا جـ + جا جـ = الأيسر

(٢) الأيمن = جتا² جـ جتا² جـ + جا² جـ
= (١ − جا² جـ) جتا² جـ + جا² جـ
= جتا² جـ − جا² جـ جتا² جـ + جا² جـ
= جتا² جـ + جا² جـ (−جتا² جـ + ١)
= جتا² جـ + جا² جـ × جا² جـ
= جتا² جـ + جا⁴ جـ = الأيسر

(٣) قتا² جـ + قا² جـ = $\frac{١}{\text{جا}^2\text{جـ}} + \frac{١}{\text{جتا}^2\text{جـ}}$

= $\frac{\text{جتا}^2\text{جـ} + \text{جا}^2\text{جـ}}{\text{جا}^2\text{جـ}\,\text{جتا}^2\text{جـ}}$

= $\frac{١}{\text{جا}^2\text{جـ}\,\text{جتا}^2\text{جـ}}$

= $\frac{١}{\text{جا}^2\text{جـ}} \times \frac{١}{\text{جتا}^2\text{جـ}}$ = قتا² جـ قا² جـ

(٤) الأيمن =
جا² س + ظا² س + ٢ظا س ظتا س
= جا² س − ١ + قتا² س − ١ + ٢
= جا² س + قا² س = الأيسر
حيث ظا س ظتا س = ١
∴ جا² س = قا² س − ١
∴ ظا² س = قا² س − ١

(٥) جا ب ظا ب = جا ب × $\frac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}}$

$\frac{\text{جا}^2\text{ب}}{\text{جتا ب}} = \frac{١ - \text{جتا}^2\text{ب}}{\text{جتا ب}}$ = الأيسر

(٦) الأيمن = $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} + \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

= $\frac{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}}{\text{جا س جتا س}}$

= $\frac{١}{\text{جا س جتا س}}$ = قتا س قا س

(٧) الأيمن = $\frac{١}{\text{ظا}^2\text{أ}} + ١$

= $\frac{\text{جتا}^2\text{أ}}{\text{جا}^2\text{أ}} + ١$

= $\frac{\text{جتا}^2\text{أ} + \text{جا}^2\text{أ}}{\text{جا}^2\text{أ}} = \frac{١}{\text{جا}^2\text{أ}}$

(٨) الأيمن = (١ − ظا² جـ) (١ + ظا² جـ)

= $\left(١ - \frac{\text{جا}^2\text{جـ}}{\text{جتا}^2\text{جـ}}\right)$ قا² جـ

= $\left(\frac{\text{جتا}^2\text{جـ} - \text{جا}^2\text{جـ}}{\text{جتا}^2\text{جـ}}\right)$ قا² جـ

تمرين حساب المثلثات (٢)

المجموعة (أ) :

(١) حا س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ ق(ش) = ٤٥°

حا س موجبة

∴ (ش) تقع في الربع الأول أو الثاني

∴ ق(ش) = ٤٥°

ق(ش) = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

∴ م . ح = {٤٥° ، ١٣٥°}

(٢) حتا س = $-\frac{١}{٢}$

حتا س سالبة

∴ تقع في الربع الثاني أو الثالث

∴ ق(ش) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

ق(ش) = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

∴ م . ح = {١٢٠° ، ٢٤٠°}

(٣) ظا² س = ٣ ظا س = ± $\sqrt{٣}$

عندما ظا س = $\sqrt{٣}$

(ش) تقع في الربع الأول أو الثالث

∴ ق(ش) = ٦٠°

، ق(ش) = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

عندما ظا س = $-\sqrt{٣}$

(ش) تقع في الثاني أو الرابع

ق(ش) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

ق(ش) = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

م . ح = {٦٠° ، ١٢٠° ، ٢٤٠° ، ٣٠٠°}

(٤) حا س = حتا س بالقسمة على حتا س

ظا س = ١ ∴ ظا س موجبة

∴ الزاوية تقع في الربع الأول أو الثالث

∴ ق(ش) = ٤٥°

ق(ش) = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

م . ح = {٤٥° ، ٢٢٥°}

٢حا س حتا س = ظا س = حا س

٢حا س حتا س − حا س = ٠

حا س (٢حتا س − ١) = ٠

حا س = ٠ ، ٢حتا س = ١

ق(ش) = ٠ ، ١٨٠°

حتا س = $\frac{١}{٢}$

ق(ش) = ٦٠° أ، ٣٠٠°

م . ح = {٠° ، ٦٠° ، ١٨٠° ، ٣٠٠°}

(٦) ٢حا س − $\frac{١}{\text{حا س}}$ − ١ = ٠ × حا س

٢حا² س − ١ − حا س = ٠

٢حا² س − حا س − ١ = ٠

(٢حا س + ١) (حا س − ١) = ٠

عندما حا س = $\frac{-١}{٢}$ ‖ عندما حا س = ١

حا س سالبة ∴ ق(ش) = ٩٠°

∴ الزاوية تقع في الثالث والرابع

ق(ش) = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

ق(ش) = ٣٣٠°

م . ح = {٩٠° ، ٢١٠° ، ٣٣٠°}

(٧) حا² س − ٢حتا س + $\frac{١}{٤}$ = ٠

١ − حتا² س − ٢حتا س + $\frac{١}{٤}$ = ٠ × −٤

−٤ + ٤حتا² س + ٨حتا س − ١ = ٠

٤حتا² س + ٨حتا س − ٥ = ٠

(٢حتا س + ٥) (٢حتا س − ١) = ٠

٢حتا س = $\frac{٥}{٢}$ | ٢حتا س = ١

ليس لها حل لأن | حتا س = $\frac{١}{٢}$

حتا س ∉ [−١ ، ١] | ق(ش) = ٦٠° ، ٣٠٠°

م . ح = {٦٠° ، ٣٠٠°}

(٨) ٢حتا س = ٤حتا س ∴ ظا س = ٢

ق(ش) = ٦٣° ٢٦′

أ، ق(ش) = ٢٤٣° ٢٦′

(٩) ٢حتا² س − ٥حتا س − ٣ = ٠

(٢حتا س + ١) (حتا س − ٣) = ٠

حتا س = $-\frac{١}{٢}$

حتا س = ٣ ليس لها حل

ق(ش) = ١٢٠° أ، ٢٤٠°

∴ م . ح = {١٢٠° ، ٢٤٠°}

(١٠) حا س = ٢ ليس لها حل

لأن المدى حا س = [−١ ، ١]

(١١) ∵ ظا س = −١ ∴ ق(ش) = ١٣٥°

أ، ق(ش) = ٣١٥°

∴ م . ح = {١٣٥° ، ٣١٥°}

(١٢) عوض عن حا² θ بدلالة حتا² θ

حيث : حا² θ = ١ − حتا² θ

∴ ١ − حتا² θ − حتا² θ = $\frac{١}{٢}$

∴ ٢ حتا² θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ حتا² θ = $\frac{١}{٤}$

∴ حتا θ = ± $\frac{١}{٢}$

عندما حتا θ = $\frac{١}{٢}$ | حتا θ = $-\frac{١}{٢}$

∴ ق(θ) = ٦٠° | ق(θ) = ١٢٠°

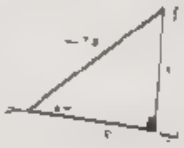
أ، ق(θ) = ٣٠٠° | أ، ق(θ) = ٢٤٠°

∴ م . ح = {٦٠° ، ١٢٠° ، ٢٤٠° ، ٣٠٠°}

تمارين حساب المثلثات (٣)

= ٩٠ − ق(جـ)

= ٩٠ − ٥٣° = ٣٧°



جا ٥٣° = أب / ٢٥

أب = ٢٥ × جا ٥٣° ≃ ٢٠ سم

جا جـ = أب / ب جـ

جا ٥٣° = ٢٠ / ب جـ

ب جـ = ٢٠ / جا ٥٣° ≃ ١٥ سم

أب = √((ب جـ)² − (أ جـ)²)

= √((٢٠)² − (١٢)²) ≃ ١٥,٢ سم

جا جـ = أب / ب جـ

= ١٥,٢ / ١٢

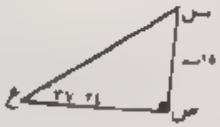
ق(جـ) = ٣٩° ٢٧′ ٤٩°

ق(أ) = ٩٠° − ق(جـ)

= ٩٠° − ٣٩° ٢٧′ ٤٩° = ٢١′ ٣٢° ٤٠°

(٢) ق(س) = ٩٠° − ق(ع)

= ٥٢° ٣٦′



ظا ع = س ص / ص ع

ظا ٣٧° ٢٤′ = ١٥ / ص ع

ص ع = ١٥ / ظا ٣٧° ٢٤′ = ١٩,٦ سم

= √((١٩,٦)² + (١٥)²) ≃ ٢٤,٧ سم

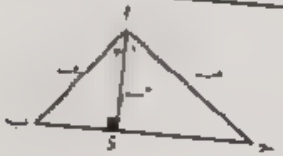
(٤) أب = √((٢٥)² + (١٨)²) ≃ ٣٠,٨ سم

جا ب = أجـ / ب جـ = ١٨ / ٢٥

ق(ب) = ٤٥° ٣٥′

ق(أ) = ١٥° ٥٤′

(٥) أد ⊥ ب جـ



في Δ أ د ب فيه:

جا ب = أد / أب

= ٣/٤ ، ق(ب) = ٣٥° ٤٨′

، ق(أ) = ٢٥° ٤١′

في Δ أ د جـ فيه:

جا جـ = أد / أجـ = ٣/٥

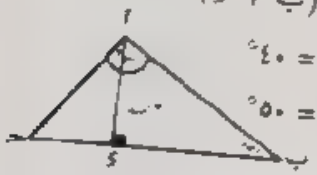
∴ ق(جـ) = ٥٢° ٣٩′

∴ ق(أ) = ٨° ٥٣′

∴ ق(أ) = ق(أ) + ق(أ)

= ٣٣° ٩٤′

(٦) من المعطيات ق(ب أ د) = ٩٠°



، ق(د أ جـ) = ٤٠°

، ق(د جـ أ) = ٥٠°

في Δ أ د ب فيه: ظا ب = أد / ب د

∴ ب د = أد / ظا ب = ١٢ / ظا ٣٠°

= ٢٠,٨ سم

جا ٣٠° = أد / أب ⇐ ١/٢ = ١٢ / أب

∴ أب = ٢٤ سم

(١٠) ـ سم $\overline{م ء}$ ـ $\overline{أ ب}$

من خواص المثلث متساوي الساقين ء منتصف $\overline{أ ب}$

ق(∠ أ م ء) = ١٠٨° ÷ ٢ = ٥٤°

في Δ أ م ء قائم في ء

جا(∠ أ م ء) = $\frac{أ ء}{أ م}$

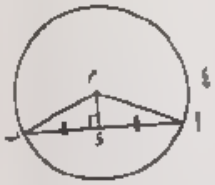
جا ٥٤° = $\frac{أ ء}{٦}$

أ ء = ٦ جا ٥٤°

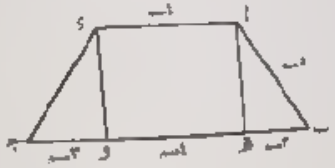
= ٤,٨٥٤١٠١٩٦

∴ أ ب = ٢ أ ء

= ٩,٧٠٨ ≃ ٩,٧١ سم



(١١)



جتا ب = $\frac{٣}{٤}$

ق(∠ ب) = ٤٩° ٧′ ٥٣°

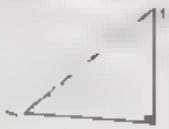
ق(∠ ب أ هـ) = ٩٠ − ٤٩° ٧′ ٥٣°

= ١٢′ ٥٢ ٣٦°

ق(∠ أ) = ١٢′ ٥٢ ٣٦° + ٩٠°

= ١٢′ ٥٢ ١٢٦°

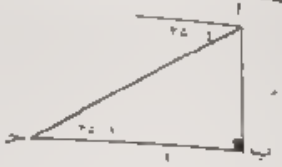
تمرين (٤)



(١) جا ٢١° = $\frac{أ ب}{٥٠}$

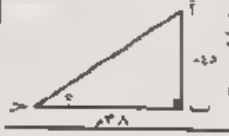
ب = ٥٠ ظا ٢٤ ٥٨

≃ ٨١



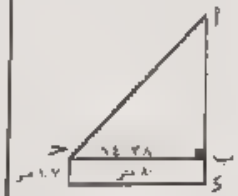
(٢) جتا ح = $\frac{أ ب}{ب ح}$

ب ح = $\frac{١٠٠}{ص ١٤′ ٢٥}$ = ٢١٢,٢ سم



(٣) جا ح = $\frac{أ ب}{ب ح}$ = $\frac{٤٥}{٣٨}$

ق(∠ ح) = ٤٩° ٤٩′ ١٥



(٤) في Δ أ ب ح

ظا ح = $\frac{أ ب}{ب ح}$

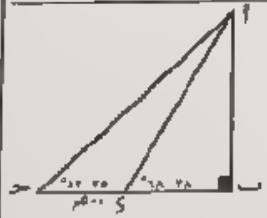
ظا ٧٤° ٣٨′ = $\frac{أ ب}{٨٠}$

∴ أ ب = ٨٠ ظا ٧٤° ٣٨′ ≃ ٢٩١,١م

∴ ارتفاع البرج عن سطح الأرض

= أ ب + ب ء = ٢٩١,١ + ١,٧

= ٢٩٢,٨ ≃ ٢٩٣م



(٥)

في Δ أ ب ح :

ظا ح = $\frac{أ ب}{ب ح}$

∴ أ ب = ب ح ظا ح ..... (١)

في Δ أ ب ء ظا ء = $\frac{أ ب}{ب ء}$

ب ح ظا ح = ب ء ظا ء

(ب ء + ٥٠٠) ظا ح = ب ء ظا ء

ب ء ظا ح + ٥٠٠ ظا ح = ب ء ظا ء

ب ء ظا ء − ب ء جا ح = ٥٠٠ ظا ح

ب ء (ظا ء − ظا ح) = ٥٠٠ ظا ح

∴ ب ء = $\frac{٥٠٠ ظا ح}{ظا ء − ظا ح}$

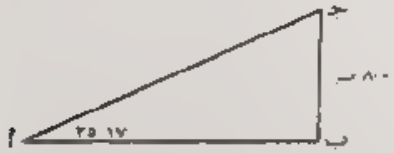
عوض عن ق(∠ ح) ، ق(∠ ء)

∴ ب ء = $\frac{٦٤٩,٦٥}{١,٢٣}$ ≃ ٥٢٦,٠٣م

∴ أ ب = ٥٢٦,٠٣ ظا ٢٨′ ٦٨°

≃ ١٣٣٣,١٣م

(٦)



$\overline{ب ح}$ ارتفاع الطائرة

، $\overline{أ ج}$ البعد بين الشخص والطائرة .

∴ جا ١٧′ ٢٥° = $\frac{٨٠٠}{أ ج}$

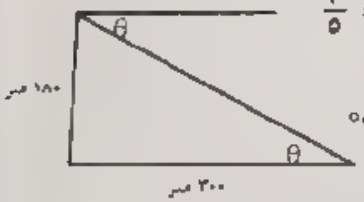
∴ أ ج = $\frac{٨٠٠}{جا ١٧′ ٢٥°}$ ≃ ١٨٧٣ متر

(٧) ظا θ = $\frac{١٨٠}{٣٠٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

∴ ق(θ) =

٤٩′ ٥٧′ ٣٠°

≃ ٠,٥٤



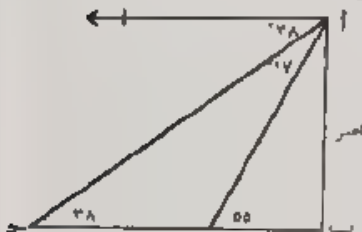
(٨) بفرض أن ارتفاع الصخرة

هو أ ب

وأن البعد

بين المبنيتين

هو ج ء



$\frac{٥٠}{\text{ط}\,\text{نق}^٢} = \text{جا}\,\theta$

$\frac{٥٠}{\text{نق}^٢} = \text{جا}\,\theta$

$\frac{٥٠}{\text{ط}\,٥٥} = ٥$ ∴ $\text{جا}\,\theta = ٥$

$\theta = \text{جا}^{-١}\,٥$

$\text{نق} = \frac{٥٠}{\text{ط}\,\text{جا}\,\theta} = \frac{٥٠}{\text{ط}\,\text{جا}\,\theta} \simeq ٢٩$ متر

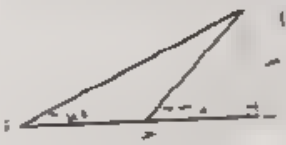
$\frac{٣٠}{٥٠} = \text{جا}\,\theta$

$\theta = ٣٧°$

$٥٧° + ٣٧° =$

$\frac{\text{س}}{١٨٠} = ٥٧°\ ١٢'\ ٤٧''$

$\text{س}' = ١,٠٢$



$\frac{\text{أب}}{\text{جا}\,٤٥°} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا}\,٣٠°}$

∴ $\text{جـ} = \frac{\text{أب}}{\text{جا}\,٤٥°} \times \text{جا}\,٣٠°$

$\frac{٥٠}{\text{جا}\,٤٥°} \times \text{جا}\,٣٠°$

∴ $\text{جـ} = \frac{\text{أب}}{\text{جا}\,\text{جـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{جا}\,\text{جـ}}$

$\frac{٥٠}{\text{جا}\,٤٥°} = \text{جـ}$

$\text{جـ} = ٥٠ \times \text{جا}\,٣٠°$

$\text{جـ} = ٥٠ \times \text{جا}\,٣٠°$

$= ٥٠ \times \frac{١}{٢} = ٢٥$

$\text{جـ} = ٢٥ \times \text{جا}\,٣٠°$

$\text{جـ} = ١٥,٣$ دقيقة

تمرين (٥) القطاع الدائري

(١) مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}\,\text{ل}\,\text{نق}$

$= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٦$

$= ١٢$ سم^٢

(٢) $\frac{١}{٢} \times ٥ \times \text{نق} = ٣٦$

$\text{نق} = ١٢$ سم

مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}\,\text{ل}\,\text{نق}$

$\frac{١}{٢} \times ٣٦ \times ١٢$

$\theta^{د} = ٠,٢٨١٢٥$ (قياس الدائري)

$\text{س}' = \theta^{د} \times \frac{١٨٠}{\text{ط}}$

$\text{س}' = ٠,٢٨١٢٥ \times \frac{١٨٠}{\text{ط}} = ١٦°\ ٦'\ ٥٢''$

(٣) $\frac{١}{٢} \times ٠,٦ \times \text{نق}^٢ = ٣٠$

$\text{نق}^٢ = ١٠٠$ ∴ $\text{نق} = ١٠$ سم

المساحة $= \frac{١}{٢}\,\text{ل}\,\text{نق}$

$\frac{١}{٢} \times ١٠ \times \text{ل} = ٣٠$

$\text{ل} = ٦$ سم

(٤) $\frac{١}{٢} \times ٢٠ \times \text{ل} = ٢٠٠$

$\text{ل} = ٢٠$ سم

المساحة $= \frac{١}{٢}\,\theta^{د}\,\text{نق}^٢$

$\frac{١}{٢}\,\theta^{د} \times ٤٠٠ = ٢٠٠$

$\theta^{د} = ١$

$\text{س}' = ١ \times \frac{١٨٠}{\text{ط}} = ٥٧°\ ١٧'\ ٤٥''$

(٥) المساحة $= \frac{١}{٢}\,\text{ل}\,\text{نق}$

$\frac{١}{٢}\,\text{ل}\,\text{نق} = ٤$

∴ $\text{ل}\,\text{نق} = ٨$ ..... (١)

المحيط $= ٢\text{نق} + \text{ل}$

$٢\text{نق} + \text{ل} = ٨$

$\text{ل} = ٨ - ٢\text{نق}$ عوض عن ل في (١)

$(٨ - ٢\text{نق})\,\text{نق} = ٨$

$٨\text{نق} - ٢\text{نق}^٢ = ٨$

$٢\text{نق}^٢ - ٨\text{نق} + ٨ = ٠$

$\text{نق}^٢ - ٤\text{نق} + ٤ = ٠$

$(\text{نق} - ٢)^٢ = ٠$

$\text{نق} = ٢$ ، $\text{ل} = ٤$

$\theta^{د} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{٤}{٢} = ٢$

$\text{س}' = ٢ \times \frac{١٨٠}{\text{ط}} = ١١٤°\ ٣٥'\ ٣٠''$

∵ $\text{م}\,\text{س}$ مماس لشكل

$\text{م}\,\text{س} = ٨$ سم

$\text{ق}(\angle \text{أ م س}) = \frac{٦}{٨}$

$\text{ق}(\angle \text{أ م س}) = ٣٦°\ ٥٢'\ ١١''$

∴ قياس الزاوية المركزية للقطاع الأصغر الذي وتره $\overline{\text{أب}}$ هي $٧٣°\ ٤٤'\ ٢٢''$

∴ مساحة القطاع $= \frac{\text{س}°}{٣٦٠°} \times$ مساحة الدائرة

∴ مساحة القطاع $= \frac{٧٣,٧٤°}{٣٦٠°} \times \text{ط} \times ١٠٠ = ٦٤,٣٥$ سم^٢

(٧) محيط القطاع $= ٦٤$ ∴ $٢\text{نق} + \text{ل} = ٦٤$

$\text{ل} = ٦٤ - ٢\text{نق}$

$\text{ل} = ٦٤ - ٢ \times ٢١ = ٢٢$ سم

$\theta^{د} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{٢٢}{٢١} = ١,٠٤٨^{د}$

$\text{س}° = ١,٠٤٨ \times \frac{١٨٠°}{\text{ط}} = ٦٠°\ ١'\ ٢٦''$

∴ المساحة $= ٢٣١$ سم^٢

(٨) ∵ المساحة $= \frac{١}{٢}\,\text{ل}\,\text{نق}$

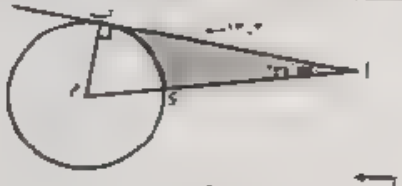
∴ $\frac{١}{٢} \times ١٦\text{نق} = ٤٨$ ∴ $\text{نق} = ٦$ سم

المحيط $= \text{ط}\,\text{نق}$

$\theta^{د} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{١٦}{٦} = ٢\frac{٢}{٣}^{د}$

∴ $\text{س}° = ٢\frac{٢}{٣} \times \frac{١٨٠}{\text{ط}} = ١٥٢°\ ٤٧'\ ١٩''$

(٩)



$\overline{\text{أب}}$ مماس عند ب

∴ $\overline{\text{م ب}} \perp \overline{\text{أب}}$

∴ $\text{ق}(\angle \text{م}) = ٩٠° - ٣١°\ ١٣' = ٥٨°\ ٤٧'$

وهي قياس الزاوية المركزية للقطاع م ء ب

مساحة الجزء المظلل المطلوب =

مساحة Δ أب م − مساحة القطاع م ء ب

∵ $\text{ظا}\,١٢\ ٣١° = \frac{\text{م ب}}{\text{أب}} = \frac{\text{م ب}}{١٣,٢}$

∴ $\text{م ب} \simeq ٨$ سم $= \text{نق}$

مساحة Δ أ م ب $= \frac{١}{٢} \times ١٣,٢ \times ٨$

$\simeq ٥٢,٨$ سم^٢

مساحة القطاع م ء ب =

$\frac{\text{س}°}{٣٦٠°} \times \text{ط}\,\text{نق}^٢ = ٣٢,٨$ سم^٢

حيث $\text{س}° = ٥٨°\ ٤٧'$ ، $\text{نق} = ٨$ سم

∴ مساحة الجزء المظلل المطلوب =

$٥٢,٨ - ٣٢,٨ \simeq ٢٠$ سم^٢

تمرين (٦) القطعة الدائرية

(١) $\theta^{د} = \frac{١٢٠° \times \text{ط}}{١٨٠°} = ٢,٠٩٤٣٩^{د}$

جا $١٢٠° = ٠,٨٦٦٠٢٥$

∴ مساحة القطعة الدائرية =

(٢) مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ٢٥ × ١٩ جا ٥٦°

≃ ١٩٧ سم²

(٣) مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ٢٤ × ٢٠ جا ١١٠°

≃ ٢٢٦ سم²

(٤) مساحة الشكل الرباعي

= $\frac{1}{2}$ × ١٥ × ١٨ × جا ٧٧°

≃ ١٣١,٥٤٠ سم²

(٥) مساحة الشكل الرباعي

= $\frac{1}{2}$ × ٣٠ × ٢١ × جا ٥٥° ≃ ٢٥٨ سم²

(٦) مساحة الشكل الرباعي

= $\frac{1}{2}$ × ٤٠ × ٣٥ × جا ١٢٥° ≃ ٥٧٣ سم²

(٧) مساحة الشكل الرباعي

= $\frac{1}{2}$ × ٣٢ × ٢٨ × جا ١١٠° ≃ ٢٤١ سم²

(٨) مساحة المسدس

= $\frac{1}{2}$ × ٦ × (١٥)² × ظا $\frac{\pi}{6}$

= $\frac{1}{2}$ × ٦ × ١٥² × $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ≃ ١١٠٩ سم²

(٩) مساحة المسبع

= $\frac{1}{2}$ × ٧ × (٢٤)² × ظا $\frac{\pi}{7}$ ≃ ٤١٨٦ سم²

(١٠) مساحة المثمن

= $\frac{1}{2}$ × ٨ × (١٢)² × ظا $\frac{\pi}{8}$ ≃ ١٣٩١ سم²

(١١) مساحة المثلث أ ب ء

= $\frac{1}{2}$ × ٨ × ٨ جا ٥٨°

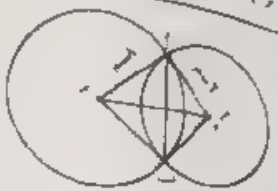
= ٢٧,١٤ سم²

∵ Δ أ ء ب

... لقطعة =

$\frac{1}{2}$ × ١٩٦ (١,٥ − ٠,٩٩٧٤٩٤)

≃ (٠,٥٠٢٥٠٦) ≃ ٤٩ سم²



أم = ٦ سم ، أ م = ٨ سم

أجـ = ١٠ سم

ق(∠ أ م ب) = ٩٠°

مساحة نصف سطح دائرة أب في دائرة م

ق = ٦ سم

ق(∠ أ م ب) = $\frac{\pi}{2}$

قياس الزاوية المركزية قطاع أ م ب

= ٣٠ × ١٥ = ٤٥°

مساحة نصف

= $\frac{1}{2}$ × ٦ × ١,٨٥٤٥٣٠ − ٠,٩٠ ≃ ١٣,١٠ سم²

مساحة نصف سطح دائرة أب في دائرة م

ق = ٨ سم

ق(∠ أ م ب) = $\frac{\pi}{8}$

قياس الزاوية المركزية ٢٣° ٤٤' ٧٣"

ق = ١,٢٨٧ ، جا ق = ٠,٩٦

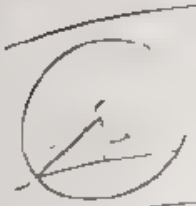
المساحة ١٠,٤٦٤ سم²

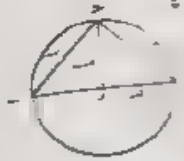
مساحة القطعتين = ٢٦,٥٦٤ سم²

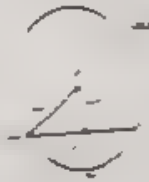
إرشادات تمارين (٧) المساحة

(١) مساحة Δ س ص ع = $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ١٨ جا ٣٨°

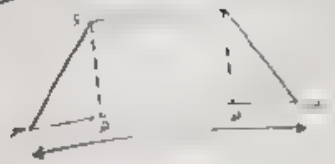
≃ ٦٦,٤٩ سم²







(١٣)



برسم ارتفاع آهـ ، هـ

من هندسة الشكل هـ هـ = ٣ م

، ب هـ = هـ حـ = ٧ م

∴ أب هـ تعامد ∆ ء حـ هـ

أهـ = ٢ هـ ٧٥ = ٧.٤٦ م

مساحة شبه منحرف =

$\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ (٣ + ٧) × ٧.٤٦ = ٣٧.٢ م²

ثالثاً : حلول الهندسة التحليلية

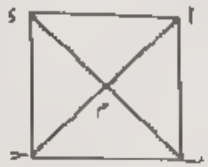
إجابات تمارين (١) الكميات المتجهة والعملية المفاهيم المتجهة

أ) $\overrightarrow{أب}$ يكافئ $\overrightarrow{ءحـ}$

ب) $\overrightarrow{بحـ}$ يكافئ $\overrightarrow{أء}$

حـ) $\overrightarrow{بم}$ يكافئ $\overrightarrow{مء}$

ء) $\overrightarrow{أم}$ يكافئ $\overrightarrow{محـ}$



∴ $\overrightarrow{أم} = \overrightarrow{محـ}$

$\overrightarrow{بم} = \overrightarrow{مء}$

$\overrightarrow{أء} = \overrightarrow{بحـ}$

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ءحـ}$

(٤) [أ] $\overrightarrow{أء} \perp \overrightarrow{ءحـ}$ ، $\overrightarrow{مهـ} \perp \overrightarrow{ءحـ}$

$\overrightarrow{أء} \parallel \overrightarrow{مهـ}$ م هـ = أ ء

∴ الشكل أ م هـ ء متوازي أضلاع .

[ب] بالمثل $\overrightarrow{مهـ} \parallel \overrightarrow{بحـ}$ ويساويه في الطول م ب حـ هـ متوازي أضلاع

[حـ] الشكل أ م هـ ء متوازي أضلاع

$\overrightarrow{أم}$ $\overrightarrow{ءهـ}$ ، $\overrightarrow{محـ}$ $\overrightarrow{ءهـ}$

ينتج أيضاً : $\overrightarrow{ءم}$ $\overrightarrow{هـحـ}$

∴ الشكل م ب حـ هـ متوازي أضلاع

الشكل م حـ هـ ء متوازي أضلاع

∴ $\overrightarrow{مهـ} = \overrightarrow{أء} = \overrightarrow{بحـ}$

∴ $\overrightarrow{ءهـ} = \overrightarrow{أم} = \overrightarrow{محـ}$

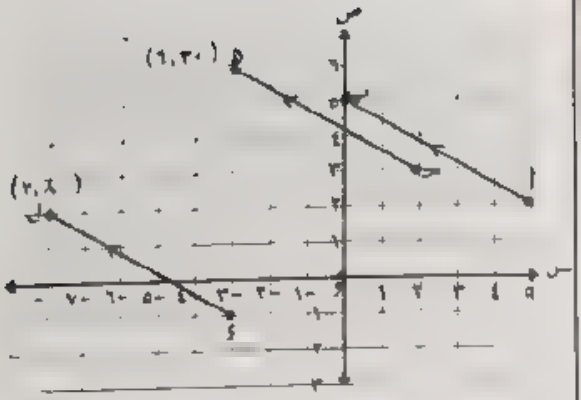
∴ $\overrightarrow{بم} = \overrightarrow{مء} = \overrightarrow{حـهـ}$

∴ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

= (٥ ، ١٥) − (٢ ، ٥)

= (−٥ ، ١٣)

$\overrightarrow{حـهـ} = \overrightarrow{أب}$



∴ $\overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{حـ}$

= (−٥ ، ٣) + (٢ ، ٣)

= (−٣ ، ٦)

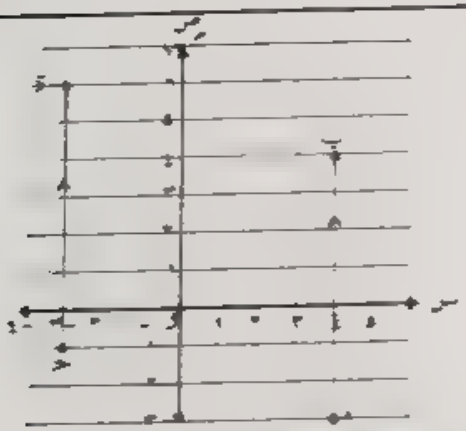
∵ $\overrightarrow{ءل} = \overrightarrow{أب}$ ∴ $\overrightarrow{ل} - \overrightarrow{ء} = \overrightarrow{أب}$

∴ $\overrightarrow{ل} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ء}$

= (−٥ ، ٣) + (−٣ ، −١)

= (−٨ ، ٢)

(٥)



لاحظ أن $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

= (٤ ، ٤) − (١ ، −٣) = (٣ ، ٧)

ء = (−٣ ، ٢) ، م = (١ ، ٦)

∴ هـ = (١ ، −٧)

• إذاً

∴ س حـ = ع س ✓

إرشادات تمارين (٢) مفهوم المتجه هندسيا وجبريا

(٤) ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٦ ، ٤٧ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٥٩ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٦ ، ٦٧ ، ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٣ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٧٦ ، ٧٧ ، ٧٨ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣ ، ٨٤ ، ٨٥ ، ٨٦ ، ٨٧ ، ٨٨ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩١ ، ٩٢ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٧ ، ٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠ ، ١٠١ ، ١٠٢ ، ١٠٣ ، ١٠٤ ، ١٠٥ ، ١٠٦ ، ١٠٧ ، ١٠٨ ، ١٠٩ ، ١١٠ ، ١١١ ، ١١٢ ، ١١٣ ، ١١٤ ، ١١٥ ، ١١٦ ، ١١٧ ، ١١٨ ، ١١٩ ، ١٢٠ ، ١٢١ ، ١٢٢ ، ١٢٣ ، ١٢٤ ، ١٢٥ ، ١٢٦ ، ١٢٧ ، ١٢٨ ، ١٢٩ ، ١٣٠ ، ١٣١ ، ١٣٢ ، ١٣٣ ، ١٣٤ ، ١٣٥ ، ١٣٦ ، ١٣٧ ، ١٣٨ ، ١٣٩ ، ١٤٠ ، ١٤١ ، ١٤٢ ، ١٤٣ ، ١٤٤ ، ١٤٥ ، ١٤٦ ، ١٤٧ ، ١٤٨ ، ١٤٩ ، ١٥٠ ، ١٥١ ، ١٥٢ ، ١٥٣ ، ١٥٤ ، ١٥٥ ، ١٥٦ ، ١٥٧ ، ١٥٨ ، ١٥٩ ، ١٦٠ ، ١٦١ ، ١٦٢ ، ١٦٣ ، ١٦٤ ، ١٦٥ ، ١٦٦ ، ١٦٧ ، ١٦٨ ، ١٦٩ ، ١٧٠ ، ١٧١ ، ١٧٢ ، ١٧٣ ، ١٧٤ ، ١٧٥ ، ١٧٦ ، ١٧٧ ، ١٧٨ ، ١٧٩ ، ١٨٠ ، ١٨١ ، ١٨٢ ، ١٨٣ ، ١٨٤ ، ١٨٥ ، ١٨٦ ، ١٨٧ ، ١٨٨ ، ١٨٩ ، ١٩٠ ، ١٩١ ، ١٩٢ ، ١٩٣ ، ١٩٤ ، ١٩٥ ، ١٩٦ ، ١٩٧ ، ١٩٨ ، ١٩٩ ، ٢٠٠ ، ٢٠١ ، ٢٠٢ ، ٢٠٣ ، ٢٠٤ ، ٢٠٥ ، ٢٠٦ ، ٢٠٧ ، ٢٠٨ ، ٢٠٩ ، ٢١٠ ، ٢١١ ، ٢١٢ ، ٢١٣ ، ٢١٤ ، ٢١٥ ، ٢١٦ ، ٢١٧ ، ٢١٨ ، ٢١٩ ، ٢٢٠ ، ٢٢١ ، ٢٢٢ ، ٢٢٣ ، ٢٢٤ ، ٢٢٥ ، ٢٢٦ ، ٢٢٧ ، ٢٢٨ ، ٢٢٩ ، ٢٣٠ ، ٢٣١ ، ٢٣٢ ، ٢٣٣ ، ٢٣٤ ، ٢٣٥ ، ٢٣٦ ، ٢٣٧ ، ٢٣٨ ، ٢٣٩ ، ٢٤٠ ، ٢٤١ ، ٢٤٢ ، ٢٤٣ ، ٢٤٤ ، ٢٤٥ ، ٢٤٦ ، ٢٤٧ ، ٢٤٨ ، ٢٤٩ ، ٢٥٠ ، ٢٥١ ، ٢٥٢ ، ٢٥٣ ، ٢٥٤ ، ٢٥٥ ، ٢٥٦ ، ٢٥٧ ، ٢٥٨ ، ٢٥٩ ، ٢٦٠ ، ٢٦١ ، ٢٦٢ ، ٢٦٣ ، ٢٦٤ ، ٢٦٥ ، ٢٦٦ ، ٢٦٧ ، ٢٦٨ ، ٢٦٩ ، ٢٧٠ ، ٢٧١ ، ٢٧٢ ، ٢٧٣ ، ٢٧٤ ، ٢٧٥ ، ٢٧٦ ، ٢٧٧ ، ٢٧٨ ، ٢٧٩ ، ٢٨٠ ، ٢٨١ ، ٢٨٢ ، ٢٨٣ ، ٢٨٤ ، ٢٨٥ ، ٢٨٦ ، ٢٨٧ ، ٢٨٨ ، ٢٨٩ ، ٢٩٠ ، ٢٩١ ، ٢٩٢ ، ٢٩٣ ، ٢٩٤ ، ٢٩٥ ، ٢٩٦ ، ٢٩٧ ، ٢٩٨ ، ٢٩٩ ، ٣٠٠ ، ٣٠١ ، ٣٠٢ ، ٣٠٣ ، ٣٠٤ ، ٣٠٥ ، ٣٠٦ ، ٣٠٧ ، ٣٠٨ ، ٣٠٩ ، ٣١٠ ، ٣١١ ، ٣١٢ ، ٣١٣ ، ٣١٤ ، ٣١٥ ، ٣١٦ ، ٣١٧ ، ٣١٨ ، ٣١٩ ، ٣٢٠ ، ٣٢١ ، ٣٢٢ ، ٣٢٣ ، ٣٢٤ ، ٣٢٥ ، ٣٢٦ ، ٣٢٧ ، ٣٢٨ ، ٣٢٩ ، ٣٣٠ ، ٣٣١ ، ٣٣٢ ، ٣٣٣ ، ٣٣٤ ، ٣٣٥ ، ٣٣٦ ، ٣٣٧ ، ٣٣٨ ، ٣٣٩ ، ٣٤٠ ، ٣٤١ ، ٣٤٢ ، ٣٤٣ ، ٣٤٤ ، ٣٤٥ ، ٣٤٦ ، ٣٤٧ ، ٣٤٨ ، ٣٤٩ ، ٣٥٠ ، ٣٥١ ، ٣٥٢ ، ٣٥٣ ، ٣٥٤ ، ٣٥٥ ، ٣٥٦ ، ٣٥٧ ، ٣٥٨ ، ٣٥٩ ، ٣٦٠ ، ٣٦١ ، ٣٦٢ ، ٣٦٣ ، ٣٦٤ ، ٣٦٥ ، ٣٦٦ ، ٣٦٧ ، ٣٦٨ ، ٣٦٩ ، ٣٧٠ ، ٣٧١ ، ٣٧٢ ، ٣٧٣ ، ٣٧٤ ، ٣٧٥ ، ٣٧٦ ، ٣٧٧ ، ٣٧٨ ، ٣٧٩ ، ٣٨٠ ، ٣٨١ ، ٣٨٢ ، ٣٨٣ ، ٣٨٤ ، ٣٨٥ ، ٣٨٦ ، ٣٨٧ ، ٣٨٨ ، ٣٨٩ ، ٣٩٠ ، ٣٩١ ، ٣٩٢ ، ٣٩٣ ، ٣٩٤ ، ٣٩٥ ، ٣٩٦ ، ٣٩٧ ، ٣٩٨ ، ٣٩٩ ، ٤٠٠ ، ٤٠١ ، ٤٠٢ ، ٤٠٣ ، ٤٠٤ ، ٤٠٥ ، ٤٠٦ ، ٤٠٧ ، ٤٠٨ ، ٤٠٩ ، ٤١٠ ، ٤١١ ، ٤١٢ ، ٤١٣ ، ٤١٤ ، ٤١٥ ، ٤١٦ ، ٤١٧ ، ٤١٨ ، ٤١٩ ، ٤٢٠ ، ٤٢١ ، ٤٢٢ ، ٤٢٣ ، ٤٢٤ ، ٤٢٥ ، ٤٢٦ ، ٤٢٧ ، ٤٢٨ ، ٤٢٩ ، ٤٣٠ ، ٤٣١ ، ٤٣٢ ، ٤٣٣ ، ٤٣٤ ، ٤٣٥ ، ٤٣٦ ، ٤٣٧ ، ٤٣٨ ، ٤٣٩ ، ٤٤٠ ، ٤٤١ ، ٤٤٢ ، ٤٤٣ ، ٤٤٤ ، ٤٤٥ ، ٤٤٦ ، ٤٤٧ ، ٤٤٨ ، ٤٤٩ ، ٤٥٠ ، ٤٥١ ، ٤٥٢ ، ٤٥٣ ، ٤٥٤ ، ٤٥٥ ، ٤٥٦ ، ٤٥٧ ، ٤٥٨ ، ٤٥٩ ، ٤٦٠ ، ٤٦١ ، ٤٦٢ ، ٤٦٣ ، ٤٦٤ ، ٤٦٥ ، ٤٦٦ ، ٤٦٧ ، ٤٦٨ ، ٤٦٩ ، ٤٧٠ ، ٤٧١ ، ٤٧٢ ، ٤٧٣ ، ٤٧٤ ، ٤٧٥ ، ٤٧٦ ، ٤٧٧ ، ٤٧٨ ، ٤٧٩ ، ٤٨٠ ، ٤٨١ ، ٤٨٢ ، ٤٨٣ ، ٤٨٤ ، ٤٨٥ ، ٤٨٦ ، ٤٨٧ ، ٤٨٨ ، ٤٨٩ ، ٤٩٠ ، ٤٩١ ، ٤٩٢ ، ٤٩٣ ، ٤٩٤ ، ٤٩٥ ، ٤٩٦ ، ٤٩٧ ، ٤٩٨ ، ٤٩٩ ، ٥٠٠ ، ٥٠١ ، ٥٠٢ ، ٥٠٣ ، ٥٠٤ ، ٥٠٥ ، ٥٠٦ ، ٥٠٧ ، ٥٠٨ ، ٥٠٩ ، ٥١٠ ، ٥١١ ، ٥١٢ ، ٥١٣ ، ٥١٤ ، ٥١٥ ، ٥١٦ ، ٥١٧ ، ٥١٨ ، ٥١٩ ، ٥٢٠ ، ٥٢١ ، ٥٢٢ ، ٥٢٣ ، ٥٢٤ ، ٥٢٥ ، ٥٢٦ ، ٥٢٧ ، ٥٢٨ ، ٥٢٩ ، ٥٣٠ ، ٥٣١ ، ٥٣٢ ، ٥٣٣ ، ٥٣٤ ، ٥٣٥ ، ٥٣٦ ، ٥٣٧ ، ٥٣٨ ، ٥٣٩ ، ٥٤٠ ، ٥٤١ ، ٥٤٢ ، ٥٤٣ ، ٥٤٤ ، ٥٤٥ ، ٥٤٦ ، ٥٤٧ ، ٥٤٨ ، ٥٤٩ ، ٥٥٠ ، ٥٥١ ، ٥٥٢ ، ٥٥٣ ، ٥٥٤ ، ٥٥٥ ، ٥٥٦ ، ٥٥٧ ، ٥٥٨ ، ٥٥٩ ، ٥٦٠ ، ٥٦١ ، ٥٦٢ ، ٥٦٣ ، ٥٦٤ ، ٥٦٥ ، ٥٦٦ ، ٥٦٧ ، ٥٦٨ ، ٥٦٩ ، ٥٧٠ ، ٥٧١ ، ٥٧٢ ، ٥٧٣ ، ٥٧٤ ، ٥٧٥ ، ٥٧٦ ، ٥٧٧ ، ٥٧٨ ، ٥٧٩ ، ٥٨٠ ، ٥٨١ ، ٥٨٢ ، ٥٨٣ ، ٥٨٤ ، ٥٨٥ ، ٥٨٦ ، ٥٨٧ ، ٥٨٨ ، ٥٨٩ ، ٥٩٠ ، ٥٩١ ، ٥٩٢ ، ٥٩٣ ، ٥٩٤ ، ٥٩٥ ، ٥٩٦ ، ٥٩٧ ، ٥٩٨ ، ٥٩٩ ، ٦٠٠ ، ٦٠١ ، ٦٠٢ ، ٦٠٣ ، ٦٠٤ ، ٦٠٥ ، ٦٠٦ ، ٦٠٧ ، ٦٠٨ ، ٦٠٩ ، ٦١٠ ، ٦١١ ، ٦١٢ ، ٦١٣ ، ٦١٤ ، ٦١٥ ، ٦١٦ ، ٦١٧ ، ٦١٨ ، ٦١٩ ، ٦٢٠ ، ٦٢١ ، ٦٢٢ ، ٦٢٣ ، ٦٢٤ ، ٦٢٥ ، ٦٢٦ ، ٦٢٧ ، ٦٢٨ ، ٦٢٩ ، ٦٣٠ ، ٦٣١ ، ٦٣٢ ، ٦٣٣ ، ٦٣٤ ، ٦٣٥ ، ٦٣٦ ، ٦٣٧ ، ٦٣٨ ، ٦٣٩ ، ٦٤٠ ، ٦٤١ ، ٦٤٢ ، ٦٤٣ ، ٦٤٤ ، ٦٤٥ ، ٦٤٦ ، ٦٤٧ ، ٦٤٨ ، ٦٤٩ ، ٦٥٠ ، ٦٥١ ، ٦٥٢ ، ٦٥٣ ، ٦٥٤ ، ٦٥٥ ، ٦٥٦ ، ٦٥٧ ، ٦٥٨ ، ٦٥٩ ، ٦٦٠ ، ٦٦١ ، ٦٦٢ ، ٦٦٣ ، ٦٦٤ ، ٦٦٥ ، ٦٦٦ ، ٦٦٧ ، ٦٦٨ ، ٦٦٩ ، ٦٧٠ ، ٦٧١ ، ٦٧٢ ، ٦٧٣ ، ٦٧٤ ، ٦٧٥ ، ٦٧٦ ، ٦٧٧ ، ٦٧٨ ، ٦٧٩ ، ٦٨٠ ، ٦٨١ ، ٦٨٢ ، ٦٨٣ ، ٦٨٤ ، ٦٨٥ ، ٦٨٦ ، ٦٨٧ ، ٦٨٨ ، ٦٨٩ ، ٦٩٠ ، ٦٩١ ، ٦٩٢ ، ٦٩٣ ، ٦٩٤ ، ٦٩٥ ، ٦٩٦ ، ٦٩٧ ، ٦٩٨ ، ٦٩٩ ، ٧٠٠ ، ٧٠١ ، ٧٠٢ ، ٧٠٣ ، ٧٠٤ ، ٧٠٥ ، ٧٠٦ ، ٧٠٧ ، ٧٠٨ ، ٧٠٩ ، ٧١٠ ، ٧١١ ، ٧١٢ ، ٧١٣ ، ٧١٤ ، ٧١٥ ، ٧١٦ ، ٧١٧ ، ٧١٨ ، ٧١٩ ، ٧٢٠ ، ٧٢١ ، ٧٢٢ ، ٧٢٣ ، ٧٢٤ ، ٧٢٥ ، ٧٢٦ ، ٧٢٧ ، ٧٢٨ ، ٧٢٩ ، ٧٣٠ ، ٧٣١ ، ٧٣٢ ، ٧٣٣ ، ٧٣٤ ، ٧٣٥ ، ٧٣٦ ، ٧٣٧ ، ٧٣٨ ، ٧٣٩ ، ٧٤٠ ، ٧٤١ ، ٧٤٢ ، ٧٤٣ ، ٧٤٤ ، ٧٤٥ ، ٧٤٦ ، ٧٤٧ ، ٧٤٨ ، ٧٤٩ ، ٧٥٠ ، ٧٥١ ، ٧٥٢ ، ٧٥٣ ، ٧٥٤ ، ٧٥٥ ، ٧٥٦ ، ٧٥٧ ، ٧٥٨ ، ٧٥٩ ، ٧٦٠ ، ٧٦١ ، ٧٦٢ ، ٧٦٣ ، ٧٦٤ ، ٧٦٥ ، ٧٦٦ ، ٧٦٧ ، ٧٦٨ ، ٧٦٩ ، ٧٧٠ ، ٧٧١ ، ٧٧٢ ، ٧٧٣ ، ٧٧٤ ، ٧٧٥ ، ٧٧٦ ، ٧٧٧ ، ٧٧٨ ، ٧٧٩ ، ٧٨٠ ، ٧٨١ ، ٧٨٢ ، ٧٨٣ ، ٧٨٤ ، ٧٨٥ ، ٧٨٦ ، ٧٨٧ ، ٧٨٨ ، ٧٨٩ ، ٧٩٠ ، ٧٩١ ، ٧٩٢ ، ٧٩٣ ، ٧٩٤ ، ٧٩٥ ، ٧٩٦ ، ٧٩٧ ، ٧٩٨ ، ٧٩٩ ، ٨٠٠ ، ٨٠١ ، ٨٠٢ ، ٨٠٣ ، ٨٠٤ ، ٨٠٥ ، ٨٠٦ ، ٨٠٧ ، ٨٠٨ ، ٨٠٩ ، ٨١٠ ، ٨١١ ، ٨١٢ ، ٨١٣ ، ٨١٤ ، ٨١٥ ، ٨١٦ ، ٨١٧ ، ٨١٨ ، ٨١٩ ، ٨٢٠ ، ٨٢١ ، ٨٢٢ ، ٨٢٣ ، ٨٢٤ ، ٨٢٥ ، ٨٢٦ ، ٨٢٧ ، ٨٢٨ ، ٨٢٩ ، ٨٣٠ ، ٨٣١ ، ٨٣٢ ، ٨٣٣ ، ٨٣٤ ، ٨٣٥ ، ٨٣٦ ، ٨٣٧ ، ٨٣٨ ، ٨٣٩ ، ٨٤٠ ، ٨٤١ ، ٨٤٢ ، ٨٤٣ ، ٨٤٤ ، ٨٤٥ ، ٨٤٦ ، ٨٤٧ ، ٨٤٨ ، ٨٤٩ ، ٨٥٠ ، ٨٥١ ، ٨٥٢ ، ٨٥٣ ، ٨٥٤ ، ٨٥٥ ، ٨٥٦ ، ٨٥٧ ، ٨٥٨ ، ٨٥٩ ، ٨٦٠ ، ٨٦١ ، ٨٦٢ ، ٨٦٣ ، ٨٦٤ ، ٨٦٥ ، ٨٦٦ ، ٨٦٧ ، ٨٦٨ ، ٨٦٩ ، ٨٧٠ ، ٨٧١ ، ٨٧٢ ، ٨٧٣ ، ٨٧٤ ، ٨٧٥ ، ٨٧٦ ، ٨٧٧ ، ٨٧٨ ، ٨٧٩ ، ٨٨٠ ، ٨٨١ ، ٨٨٢ ، ٨٨٣ ، ٨٨٤ ، ٨٨٥ ، ٨٨٦ ، ٨٨٧ ، ٨٨٨ ، ٨٨٩ ، ٨٩٠ ، ٨٩١ ، ٨٩٢ ، ٨٩٣ ، ٨٩٤ ، ٨٩٥ ، ٨٩٦ ، ٨٩٧ ، ٨٩٨ ، ٨٩٩ ، ٩٠٠ ، ٩٠١ ، ٩٠٢ ، ٩٠٣ ، ٩٠٤ ، ٩٠٥ ، ٩٠٦ ، ٩٠٧ ، ٩٠٨ ، ٩٠٩ ، ٩١٠ ، ٩١١ ، ٩١٢ ، ٩١٣ ، ٩١٤ ، ٩١٥ ، ٩١٦ ، ٩١٧ ، ٩١٨ ، ٩١٩ ، ٩٢٠ ، ٩٢١ ، ٩٢٢ ، ٩٢٣ ، ٩٢٤ ، ٩٢٥ ، ٩٢٦ ، ٩٢٧ ، ٩٢٨ ، ٩٢٩ ، ٩٣٠ ، ٩٣١ ، ٩٣٢ ، ٩٣٣ ، ٩٣٤ ، ٩٣٥ ، ٩٣٦ ، ٩٣٧ ، ٩٣٨ ، ٩٣٩ ، ٩٤٠ ، ٩٤١ ، ٩٤٢ ، ٩٤٣ ، ٩٤٤ ، ٩٤٥ ، ٩٤٦ ، ٩٤٧ ، ٩٤٨ ، ٩٤٩ ، ٩٥٠ ، ٩٥١ ، ٩٥٢ ، ٩٥٣ ، ٩٥٤ ، ٩٥٥ ، ٩٥٦ ، ٩٥٧ ، ٩٥٨ ، ٩٥٩ ، ٩٦٠ ، ٩٦١ ، ٩٦٢ ، ٩٦٣ ، ٩٦٤ ، ٩٦٥ ، ٩٦٦ ، ٩٦٧ ، ٩٦٨ ، ٩٦٩ ، ٩٧٠ ، ٩٧١ ، ٩٧٢ ، ٩٧٣ ، ٩٧٤ ، ٩٧٥ ، ٩٧٦ ، ٩٧٧ ، ٩٧٨ ، ٩٧٩ ، ٩٨٠ ، ٩٨١ ، ٩٨٢ ، ٩٨٣ ، ٩٨٤ ، ٩٨٥ ، ٩٨٦ ، ٩٨٧ ، ٩٨٨ ، ٩٨٩ ، ٩٩٠ ، ٩٩١ ، ٩٩٢ ، ٩٩٣ ، ٩٩٤ ، ٩٩٥ ، ٩٩٦ ، ٩٩٧ ، ٩٩٨ ، ٩٩٩ ، ١٠٠٠

إرشادات تمارين (٣) الصور المختلفة للمتجه

(١) ظا θ = $\frac{٤}{٤\sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ ق(θ̂) = ٣٠° = $\frac{\pi}{٦}$

|أ| = $\sqrt{١٦+٤٨}$ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨

∴ الصورة القطبية (٨ ، $\frac{\pi}{٦}$)

(٢) س = ١٢$\sqrt{٢}$ جتا($\frac{٣\pi}{٤}$)

= ١٢$\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°

= ١٢$\sqrt{٢}$ × $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ = ١٢

، ص = ١٢$\sqrt{٢}$ جا $\frac{٣\pi}{٤}$

= ١٢$\sqrt{٢}$ × $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ = ١٢

∴ جـ = (١٢ ، ١٢)

(٣) أ = $\sqrt{٩+١٦}$ = ٥ ،

أ = −٣ س + ٤ ص

(٤) |ب| = $\sqrt{١٤٤+٢٥}$ = ١٣ ،

ب = ٥ س − ١٢ ص

(٥) ل = $\sqrt{٩+٣٦}$ = $\sqrt{٤٥}$ = ٣$\sqrt{٥}$

ل = −٣ س − ٦ ص

(٦) |ع| = $\sqrt{٤٩}$ = ٧ ، ع = −٧ س

(٧) |ف| = ٤ ، ف = ٤ ص

(٨) هـ = (٣$\sqrt{٢}$ ، ٣$\sqrt{٢}$)

|هـ| = $\sqrt{١٨+١٨}$ = $\sqrt{٣٦}$ = ٦

ظا θ = $\frac{٣\sqrt{٢}}{٣\sqrt{٢}}$ = ١ ∴ ق(θ̂) = ٤٥°

(٩) أ = (٢ ، −٣) ، ب = (٥ ، ٣) ، ل = (٨ ، ١)

∴ المتجه لموضع المكافئ = (٨ ، ١)

٢ب − أ + جـ

= ٢(٥ ، ١) − ٢(٢ ، −٣) + (٠ ، −١)

= (١٠ ، ٢) + (٤ ، ٠) + (٠ ، −١)

= (١٤ ، ١)

٢أ − ٢ب + جـ = ١٩٦ + ١

= ١٩٧

(١٠) أب = ب − أ

= (٧ ، ٠) − (−١ ، −٢) = (٨ ، ٢)

٥جـ − جـ = ٥جـ

= (٨ ، ٤) − (٠ ، ٢) = (٨ ، ٢)

أب = ٥جـ

(١١) أب = ٥جـ

جـ − أ = جـ − ٥جـ

جـ = ٥جـ + أ − ب

= (−١ ، ٥) + (٨ ، ٤) − (٥ ، ٦)

= (٣ ، ٢)

(١٢) أب = ب − أ = (٣ ، ١) − (٢ ، ١)

= (١ ، −٢)

|أب| = $\sqrt{١+٤}$ = $\sqrt{٥}$

(١٣) ٢ب جـ = جـ − ب

= (٣ ، ٥) − (٤ ، −٢) = (−١ ، −٥)

٢ب جـ = (−٢ ، −١٠)

، أب = ب − أ

= (٢ ، ١) − (٥ ، ٣) = (٣ ، ٢)

٢ب جـ − أب

= ٢$\sqrt{١٩٦+١}$ − $\sqrt{٩+٤}$

= ٢$\sqrt{١٩٦+١}$ = $\sqrt{١٤٤+٢٥}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣

(١٤) أ = (٣ ، −٢) ، ب = (٥ ، ٣) ، جـ = (−١ ، ٤)

أ − ٢ب + جـ

= (٣ ، −٢) − ٢(٥ ، ٣) + (−١ ، ٤)

= (٣ ، −٢) − (١٠ ، ٦) + (−١ ، ٤)

= (−٨ ، −٦) + (−١ ، ٤) = (−٩ ، −٢)

(١٥) أ = (٣ ، −٢) ، ب = (٥ ، ١) ، جـ = (−١ ، ٤)

أ − ٢ب + جـ

= (٣ ، −٢) − ٢(٥ ، ١) + (−١ ، ٤)

= (٣ ، −٢) − (١٠ ، ٢) + (−١ ، ٤)

= (−٧ ، −٤) + (−١ ، ٤) = (−٨ ، ٠)

(١٦) أ = (٣ ، −٢) ، ب = (٥ ، ١) ، جـ = (−١ ، ٤)

جـ − ٢ب + أ

= (−١ ، ٤) − ٢(٥ ، ١) + (٣ ، −٢)

= (−١ ، ٤) − (١٠ ، ٢) + (٣ ، −٢)

= (−١١ ، ٢) + (٣ ، −٢) = (−٨ ، ٠)

(١٧) أ = (٣ ، −٢) ، ب = (٥ ، ١) ، جـ = (−١ ، ٤)

جـ − ٢ب + أ

= (−١ ، ٤) − ٢(٥ ، ١) + (٣ ، −٢)

= (−١ ، ٤) − (١٠ ، ٢) + (٣ ، −٢)

= (−١١ ، ٢) + (٣ ، −٢) = (−٨ ، ٠)

(١٨) أب = ب − أ = (٣ ، ١) − (٢ ، −٣)

= (١ ، ٤)

المتجه لموضع المكافئ = (١ ، ٤)

(١٩) أب = وجـ

ب − أ = جـ − و

جـ = (٥ ، ٣) − (٣ ، ٨)

جـ = (٢ ، −٥)

(٩) $\overline{\text{ب}} = \sqrt{٢٥+٢٥} = \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢}$

$\therefore$ ق$(\theta) = \frac{٥}{٥} = ١$

$\therefore$ $\theta = ٤٥° = \frac{\pi}{٤}$

$\therefore$ $\overline{\text{ب}} = (٥\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤})$

(١٠) $\overline{\text{ج}} = \sqrt{٩+٢٧} = \sqrt{٣٦} = ٦$

$\therefore$ ق$(\theta) = \frac{\sqrt{٣}}{٣} = \sqrt{٣}$

$\therefore$ $\theta = ٦٠° = \frac{\pi}{٣}$

$\overline{\text{ج}} = (٦ ، \frac{\pi}{٣})$

(١١) $٢\overline{\text{ب}} = ٢(٥ ، -٢) = (١٠ ، -٤)$

$= -٤\overline{\text{س}} + ١٠\overline{\text{ص}}$

$٣\overline{\text{ج}} = ٣(١١ ، ٠) = (٣٣ ، ٠)$

$= ٣٣\overline{\text{س}}$

$\overline{\text{أ}} + \overline{\text{ب}} - \overline{\text{ج}}$

$= (٣ ، -٢) + (٥ ، -٢) + (-١١ ، ٠)$

$= (٨ ، ١) = ٨\overline{\text{س}} + \overline{\text{ص}}$

$\frac{١}{٢}(\overline{\text{ب}} + \overline{\text{ج}}) = (-١ ، ٨)$

$= -\overline{\text{س}} + ٨\overline{\text{ص}}$

(١٢) $\overline{\text{أ}} = -٦\overline{\text{ص}}$

(١٣) $\overline{\text{ب}} = ٥\text{جتا}٣٠°\overline{\text{س}} + ٥\text{جا}٣٠°\overline{\text{ص}}$

$= ٢٥\sqrt{٣}\overline{\text{س}} + ٢٥\overline{\text{ص}}$

(١٤) $\overline{\text{ج}} = -٥\text{جتا}٤٥\overline{\text{س}} + ٥\text{جا}٤٥\overline{\text{ص}}$

$= -٢٫٥\sqrt{٢}\overline{\text{س}} + ٢٫٥\sqrt{٢}\overline{\text{ص}}$

ارشادات تمارين (٤) توازي متجهين

(١) $\overline{\text{أ}} = (٣ ، -٥)$ ، $\overline{\text{ب}} = (-٦ ، ١٠)$

$\text{س}_١\text{ص}_٢ - \text{س}_٢\text{ص}_١ = ٣ \times ١٠ - ٥ \times -٦$

$=$ صفر

$\therefore$ $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ متوازيان .

(٢) $\because$ $\text{س}_١\text{ص}_٢ - \text{س}_٢\text{ص}_١ = ٤ \times ٤ - ٢ \times ٨$

$=$ صفر

$\therefore$ $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ متوازيان .

(٣) $٣ \times ٢ - ٢ \times -٣ =$ صفر

$\therefore$ $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ متوازيان .

(٤) $\because$ $\text{س}_١\text{ص}_٢ - \text{س}_٢\text{ص}_١$

$= -١٠ \times -٨ - ٦ \times ٢٤ = -٦٤ \neq ٠$

$\therefore$ $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ غير متوازيين

(٥) $\because$ $\text{س}_١\text{س}_٢ + \text{ص}_١\text{ص}_٢$

$= ٢ \times -٦ + ٤ \times ٣ = ٠$

$\therefore$ $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ متعامدان .

(٦) $\because$ $\text{س}_١\text{س}_٢ + \text{ص}_١\text{ص}_٢$

$= -٦ \times ٤ + ٣ \times ٨ =$ صفر

$\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ متعامدان

(٧) $\text{س}_١\text{س}_٢ + \text{ص}_١\text{ص}_٢$

$= -٢ \times ٢ + ١ \times -٢ = -٦ \neq ٠$

$\therefore$ $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ غير متعامدين .

(٨) $\overline{\text{ب}} + \overline{\text{ج}} = (٤ ، ٦)$

$\text{س}_١\text{ص}_٢ - \text{س}_٢\text{ص}_١$

$= ٢ \times ٦ - ٤ \times ٣ =$ صفر

المتجهان $(\overline{\text{أ}})$ ، $(\overline{\text{ب}} + \overline{\text{ج}})$ متوازيان

(٩) $\overline{\text{ب}} + \overline{\text{ج}} = (-٤ ، ٢)$

$\text{س}_١\text{س}_٢ + \text{ص}_١\text{ص}_٢$

$= ٢ \times -٤ + ٤ \times ٢ =$ صفر

لمتجهان $(\overline{\text{أ}})$ ، $(\overline{\text{ب}} + \overline{\text{ج}})$ متعامدان

(١٠) $٢\overline{\text{أ}} + ٣\overline{\text{ب}}$

$= ٢(١ ، ٢) + ٣(٣ ، ٢)$

$= (٢ ، ٤) + (٩ ، ٦) = (١١ ، ١٠)$

شرط التوازي : $\text{س}_١\text{ص}_٢ - \text{س}_٢\text{ص}_١$

$= ١١ \times ١٠ - ١٠ \times ١١ =$ صفر

$\therefore$ $(٢\overline{\text{أ}} + ٣\overline{\text{ب}})$ ، $\overline{\text{ج}}$ متوازيان

(١١) $\overline{\text{أ}} + \overline{\text{ب}} = (٣ ، \frac{٣}{٥})$

، $\overline{\text{ب}} + \overline{\text{ج}} = (٨ ، \frac{٨}{٥})$

شرط التوازي : $\text{س}_١\text{ص}_٢ - \text{س}_٢\text{ص}_١$

$= \frac{٣}{٥} \times ٨ - ٣ \times \frac{٨}{٥} =$ صفر

$\therefore$ $(\overline{\text{أ}} + \overline{\text{ب}})$ ، $(\overline{\text{ب}} + \overline{\text{ج}})$ متوازيان

(١٢) شرط التعامد : $\text{س}_١\text{س}_٢ + \text{ص}_١\text{ص}_٢ = ٠$

$٢ \times ٣ + \text{ك} \times -١ = ٠$ $\therefore$ ك $= ٦$

(١٣) $\because$ $\text{س}_١\text{س}_٢ + \text{ص}_١\text{ص}_٢ = ٠$

$\therefore$ ك $\times$ ك $+ ٨ \times -٢ = ٠$

$\therefore$ ك$^٢ = ١٦$ $\therefore$ ك $= \pm ٤$

(١٤) شرط التوازي : $\text{س}_١\text{ص}_٢ - \text{س}_٢\text{ص}_١$

$٣ \times ٢ -$ ك $\times -١ = ٠$ $\therefore$ ك $= -٦$

(١٥) $\text{س}_١\text{ص}_٢ - \text{س}_٢\text{ص}_١ = ٠$

$٢ \times$ ك $-$ صفر $\times ٥ = ٠$ $\therefore$ ك $= ٠$

(١٦) شرط التوازي : $-$ك $\times$ ك $- ١ \times -٤ = ٠$

$-$ك$^٢ + ٤ = ٠$ $\therefore$ ك$^٢ = ٤$

$\therefore$ ك $= \pm ٢$

(١٧) شرط التعامد : $\text{س}_١\text{س}_٢ + \text{ص}_١\text{ص}_٢ = ٠$

$\because ١ \times ٣ - ٢ \times$ ك $= ٠$ $\therefore$ ٢ك $= ٣$

$\therefore$ ك $= \frac{٣}{٢}$

(١٨) $\because$ $\overline{\text{ب}} - \overline{\text{أ}} = (٣ ، ٤) - (٢ ، -١)$

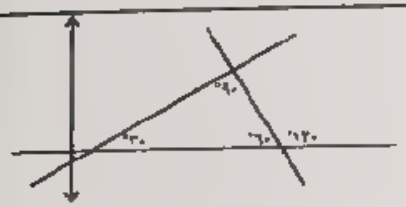
$= (١ ، ٥)$

شرط التوازي : $\text{س}_١\text{ص}_٢ - \text{س}_٢\text{ص}_١ = ٠$

$\therefore$ ك $\times ٥ - ١ \times ١٥ = ٠$

$\therefore$ ٥ك $= ١٥$ $\therefore$ ك $= ٣$

(١٩)



واضح من الرسم أن المتجهين متعامدان

لكن $\overline{\text{أ}} = (٦\text{جتا}٣٠ ، ٦\text{جا}٣٠°)$

$= (٣ ، ٣\sqrt{٣})$

$\overline{\text{ب}} = (٤\text{جتا}١٢٠° ، ٤\text{جا}١٢٠°)$

$= (-٢ ، ٢\sqrt{٣})$

$\because$ شرط التعامد : $\text{س}_١\text{س}_٢ + \text{ص}_١\text{ص}_٢ = ٠$

$\therefore$ $٣ \times -٢ + ٣\sqrt{٣} \times ٢\sqrt{٣} =$ صفر

$\therefore$ المتجهان متعامدان .

(٢٠) واضح أنهما متوازيان لأن الزاوية واحدة .

$\overline{\text{أ}} = (٢ ، ٣\sqrt{٢})$ ، $\overline{\text{ب}} = (٣ ، ٣\sqrt{٣})$

شرط التوازي : $\text{س}_١\text{ص}_٢ - \text{س}_٢\text{ص}_١ = ٠$

$\therefore$ $٢ \times ٣\sqrt{٣} - ٣ \times ٣\sqrt{٢} =$ صفر

$\therefore$ $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ متوازيان

ارشادات تمارين (٥) العمليات على المتجهات

(١) $\because$ $\overrightarrow{\text{ب ج}} = ٣\overrightarrow{\text{أ د}}$

$\therefore$ $\overrightarrow{\text{ب ج}} \parallel \overrightarrow{\text{أ د}}$ ، ب ج $= ٣$ أ د

$\therefore$ الشكل فيه ضلعان متوازيان وغير متساويين

$\therefore$ الشكل شبه منحرف

يعطى :
$\overrightarrow{اجـ} = \overrightarrow{بـ د}$

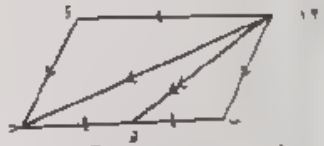
في Δ ا م د
$\overrightarrow{اـم} + \overrightarrow{مـد} = \overrightarrow{اد}$ ..... (١)

في Δ ب م جـ
$\overrightarrow{بـم} + \overrightarrow{مـجـ} = \overrightarrow{بـجـ}$ ..... (٢)

بجمع (١) ، (٢)
$\overrightarrow{اـم} + \overrightarrow{مـد} + \overrightarrow{بـم} + \overrightarrow{مـجـ}$
$= \overrightarrow{اد} + \overrightarrow{بـجـ}$ . . (٣)

$\overrightarrow{اـم} + \overrightarrow{مـجـ} = \overrightarrow{اجـ}$
$\overrightarrow{بـم} + \overrightarrow{مـد} = \overrightarrow{بـد}$

$\overrightarrow{بـجـ} - \overrightarrow{اجـ}$ (٢) بطرح
$\overrightarrow{اد} + \overrightarrow{بـد} = \overrightarrow{اجـ} - \overrightarrow{بـجـ}$



في ▱ ا ب جـ د منصف $\overline{بـجـ}$ هـ
$\overrightarrow{اهـ} = \overrightarrow{اـب} + \overrightarrow{اجـ}$ (١)

في ▱ ا ب جـ د
$\overrightarrow{اد} + \overrightarrow{دجـ} = \overrightarrow{اجـ}$

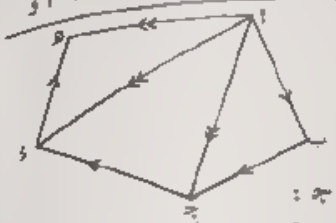
من (١) ، (٢)
$2\overrightarrow{اهـ} = \overrightarrow{اـب} + \overrightarrow{اد} + \overrightarrow{دجـ}$

٣) في ▱ ا ب جـ د
$\overrightarrow{اجـ} + \overrightarrow{جـد} = \overrightarrow{اد}$ (١)

في ▱ ا ب هـ د
$\overrightarrow{هـد} + \overrightarrow{دد} = \overrightarrow{اد}$ (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع
$2\overrightarrow{اد} = \overrightarrow{اجـ} + \overrightarrow{جـد} + \overrightarrow{اهـ} + \overrightarrow{هـد}$

(٤)



في Δ ا ب جـ :
$\overrightarrow{اـب} + \overrightarrow{بـجـ} = \overrightarrow{اجـ}$ .... (١)

في Δ ا جـ د :
$\overrightarrow{اجـ} + \overrightarrow{جـد} = \overrightarrow{اد}$ ..... (٢)

في Δ ا د هـ :
$\overrightarrow{اد} + \overrightarrow{دهـ} = \overrightarrow{اهـ}$ ..... (٣)

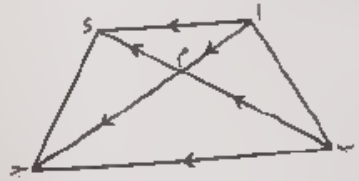
من (١) ، (٢) ، (٣) نجد بالجمع .
$\overrightarrow{اـب} + \overrightarrow{بـجـ} + \overrightarrow{اجـ} + \overrightarrow{جـد} + \overrightarrow{اد} + \overrightarrow{دهـ}$
$= \overrightarrow{اجـ} + \overrightarrow{اد} + \overrightarrow{اهـ}$

$\therefore \overrightarrow{اـب} + \overrightarrow{بـجـ} + \overrightarrow{جـد} + \overrightarrow{دهـ} = \overrightarrow{اهـ}$

بإضافة $\overrightarrow{هـا}$ للطرفين حيث $\overrightarrow{اهـ} + \overrightarrow{هـا} = \overrightarrow{0}$

$\therefore \overrightarrow{اـب} + \overrightarrow{بـجـ} + \overrightarrow{جـد} + \overrightarrow{دهـ} + \overrightarrow{هـا} = \overrightarrow{0}$

(٥) يفرض أن $\overline{اجـ} \cap \overline{بـد} = \{م\}$



في Δ ا م د . $\overrightarrow{اـم} + \overrightarrow{مـد} = \overrightarrow{اد}$ ... (١)

في Δ ب م جـ .
$\overrightarrow{بـم} + \overrightarrow{مـجـ} = \overrightarrow{بـجـ}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) .
$\overrightarrow{اـم} + \overrightarrow{مـد} + \overrightarrow{بـم} + \overrightarrow{مـجـ} = \overrightarrow{اد} + \overrightarrow{بـجـ}$

$\overrightarrow{اجـ} + \overrightarrow{بـد} = \overrightarrow{اد} + \overrightarrow{بـجـ}$

$\overrightarrow{جـد} = \overrightarrow{اد}$ ، $\overrightarrow{اـب} = \overrightarrow{هـد}$ .. (٤)

من (٤) عوض في (٣)
$\therefore 2\overrightarrow{اد} = \overrightarrow{اجـ} + \overrightarrow{اـب} + \overrightarrow{اهـ} + \overrightarrow{اد}$

$\therefore \overrightarrow{اجـ} + \overrightarrow{بـد} = \overrightarrow{اجـ}$

$\overrightarrow{اجـ} + \overrightarrow{بـد} = 2\overrightarrow{اجـ}$

$\overrightarrow{اجـ} + 2\overrightarrow{بـد} = 7\overrightarrow{اد}$

في Δ ا ب د .
$\overrightarrow{اـب} + \overrightarrow{بـد} = \overrightarrow{اد}$ ... (١)

في Δ ا جـ د .
$\overrightarrow{اد} + \overrightarrow{دجـ} = \overrightarrow{اجـ}$. (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح
$\overrightarrow{اـب} + \overrightarrow{بـد} - \overrightarrow{اد} - \overrightarrow{دجـ} = \overrightarrow{اد} - \overrightarrow{اجـ}$

$\overrightarrow{اـب} - \overrightarrow{دجـ} = 2\overrightarrow{اد} - \overrightarrow{اجـ} - \overrightarrow{بـد}$

$= 2\overrightarrow{اد} - (\overrightarrow{اجـ} + \overrightarrow{بـد})$

وهو المطلوب لأول
$\overrightarrow{اـب} - \overrightarrow{دجـ} = 2\overrightarrow{اد} - \frac{7}{2}\overrightarrow{اد}$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{اد} = \frac{3}{2}\overrightarrow{دا}$

$\therefore 2\overrightarrow{اـب} - 2\overrightarrow{دجـ} = 3\overrightarrow{دا}$

٦) في Δ ا م د :
$\overrightarrow{دـم} + \overrightarrow{مـا}$
$= \overrightarrow{دا}$ .... (١)

في Δ م ب جـ
$\overrightarrow{جـم} + \overrightarrow{مـب} = \overrightarrow{جـب}$. (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع
$\overrightarrow{دـم} + \overrightarrow{مـا} + \overrightarrow{جـم} + \overrightarrow{مـب} = \overrightarrow{دا} + \overrightarrow{جـب}$

$\overrightarrow{دـب} + \overrightarrow{جـا} = \overrightarrow{دا} + \overrightarrow{جـب}$

$\overrightarrow{دـب} - \overrightarrow{اجـ} = \overrightarrow{دا} - \overrightarrow{بـجـ}$

(٧) لقطران يصنف كل منهما الآخر

ثانيًا : صل $\overrightarrow{هـم}$
في Δ هـ ا جـ :
$\overrightarrow{هـا} + \overrightarrow{هـجـ} = 2\overrightarrow{هـم}$ ..... (١)

في Δ هـ ب د :
$\overrightarrow{هـب} + \overrightarrow{هـد} = 2\overrightarrow{هـم}$ .... (٢)

من (١) ، (٢)
$\overrightarrow{هـا} + \overrightarrow{هـجـ} = \overrightarrow{هـب} + \overrightarrow{هـد}$

(المطلوب ثانيًا)

(٨) في Δ ا ب د :
$\overrightarrow{اـب} + \overrightarrow{بـد}$
$= \overrightarrow{اد}$ .... (١)

بالضرب × ٢
$\therefore 2\overrightarrow{اـب} + 2\overrightarrow{بـد} = 2\overrightarrow{اد}$ ..... (١)'

في Δ ا د جـ :
$\overrightarrow{اجـ} + \overrightarrow{جـد} = \overrightarrow{اد}$ .... (٢) بالضرب × ٣

$\therefore 3\overrightarrow{اجـ} + 3\overrightarrow{جـد} = 3\overrightarrow{اد}$ .... (٢)'

من (١)' ، (٢)' بالجمع :
$2\overrightarrow{اـب} + 2\overrightarrow{بـد} + 3\overrightarrow{اجـ} + 3\overrightarrow{جـد} = 5\overrightarrow{اد}$

$2\overrightarrow{بـد} = 3\overrightarrow{دجـ} = -3\overrightarrow{جـد}$

$\therefore 2\overrightarrow{اـب} - 3\overrightarrow{جـد} + 3\overrightarrow{اجـ} + 3\overrightarrow{جـد} = 5\overrightarrow{اد}$

$2\overrightarrow{اـب} + 3\overrightarrow{اجـ} = 5\overrightarrow{اد}$

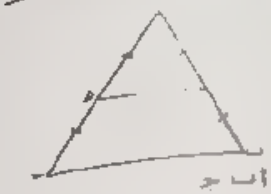
(٩) في Δ ا هـ ر :
$\overrightarrow{هـا} + \overrightarrow{اـر} = \overrightarrow{هـر}$

$\overrightarrow{هـا} = \frac{1}{3}\overrightarrow{بـا}$

وهي نفس لاجله
$\therefore \overrightarrow{هـا} = \frac{1}{3}\overrightarrow{بـا}$

بالمثل $\overrightarrow{اـر} = \frac{1}{3}\overrightarrow{اجـ}$

$\therefore \frac{1}{3}\overrightarrow{بـا} + \frac{1}{3}\overrightarrow{اجـ} = \overrightarrow{هـر}$ ... (١)



على الرسم

المطلوب

إثبات أن

$\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

البرهان في Δ أ ب جـ

$\overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ..... (١)

في Δ أ ء هـ

$\overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{أ هـ}} = \overrightarrow{\text{ء هـ}}$ ..... (٢)

$\overrightarrow{\text{ء أ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{أ ب}}$ وهما في اتجاه واحد

$\overrightarrow{\text{أ هـ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ (عوض في ٢)

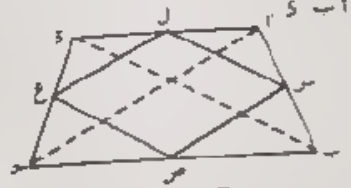
$\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ب أ}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{ء هـ}}$

$\overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}} = 2\overrightarrow{\text{ء هـ}}$ .. (٣)

من (١)، (٣) $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = 2\overrightarrow{\text{ء هـ}}$

$\overrightarrow{\text{ب جـ}} \parallel \overrightarrow{\text{ء هـ}}$ ، ب جـ = ٢ ء هـ

٣) في Δ أ ب ء



س، ص منتصفي $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{أء}}$

$\overrightarrow{\text{س ص}} \parallel \overrightarrow{\text{ب ء}}$ ، س ص = $\frac{1}{2}$ ب ء

$\overrightarrow{\text{س ص}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ب ء}}$ ..... (١)

بنفس الطريقة نثبت أن

$\overrightarrow{\text{ع ل}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ب ء}}$ ..... (٢)

من (١)، (٢)

$\overrightarrow{\text{س ص}} = \overrightarrow{\text{ع ل}} \Leftarrow$ س ص = ع ل

$\overrightarrow{\text{س ص}} \parallel \overrightarrow{\text{ع ل}}$

شكل س ص ع ل متوازي أضلاع

زيادة تمارين (٦) تطبيقات المتجهات

١) معطى أ ب جـ ء شكل رباعي فيه

$\overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

، $\overrightarrow{\text{أء}} \parallel \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

معطى أ ب جـ ء متوازي أضلاع

مطلوب إثبات أن $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ء جـ}}$

$\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$

برهان $\overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أء}} \parallel \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

$\Leftarrow \overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$

في Δ أ ء جـ

$\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$

في Δ أ ب جـ

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$

$\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

$\overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء جـ}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

$\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ء جـ}}$

شكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع

٢) معطى أ ب جـ مثلث فيه س منتصف $\overline{\text{أب}}$

$\overline{\text{س جـ}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$

برهان $\overline{\text{س جـ}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$ ، س جـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ

$\overrightarrow{\text{س جـ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

$\overrightarrow{\text{س جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}} - \overrightarrow{\text{أ س}}$

$\overrightarrow{\text{س جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

$\overrightarrow{\text{س جـ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

$\overline{\text{س جـ}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$

٣) معطى أ ب جـ مثلث فيه س منتصف $\overline{\text{أب}}$

$\overline{\text{س جـ}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$

مطلوب إثبات أن $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{س جـ}}$

برهان $\overline{\text{س جـ}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$ ، س جـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ

$\overrightarrow{\text{س جـ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

$\overrightarrow{\text{س جـ}} = \overrightarrow{\text{أ س}}$

$\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{س جـ}}$

٤) معطى أ ب جـ مثلث فيه $\overline{\text{أ جـ}}$

ء، هـ منتصفي $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$

$\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

$\overrightarrow{\text{ء هـ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ..... (١)

بنفس الطريقة نثبت أن

$\overrightarrow{\text{ل ع}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ..... (٢)

من (١)، (٢)

$\overrightarrow{\text{ء هـ}} = \overrightarrow{\text{ل ع}} \Leftarrow$ ء هـ = ل ع

$\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ل ع}}$

شكل ء هـ ع ل متوازي أضلاع

٥) معطى أ ب جـ ء شكل رباعي فيه ل، م، ن، س منتصفات $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{جـ ء}}$، $\overline{\text{ء أ}}$ على الترتيب

مطلوب إثبات أن ل م ن س متوازي أضلاع

برهان $\overline{\text{ل م}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$ ، ل م = $\frac{1}{2}$ أ جـ

$\overline{\text{ن س}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$ ، ن س = $\frac{1}{2}$ أ جـ

$\overline{\text{ل م}} \parallel \overline{\text{ن س}}$ ، ل م = ن س

ل م ن س متوازي أضلاع

٦) معطى أ ب جـ مثلث فيه س منتصف $\overline{\text{أب}}$، ص منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

$\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، س ص = $\frac{1}{2}$ ب جـ

مطلوب إثبات أن $\overline{\text{ب ص}}$، $\overline{\text{س جـ}}$ يتنصفان

برهان $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، س ص = $\frac{1}{2}$ ب جـ

$\overrightarrow{\text{س ص}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ..... (١)

بنفس الطريقة نثبت أن

$\overrightarrow{\text{ع ل}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ..... (٢)

من (١)، (٢)

$\overrightarrow{\text{س ص}} = \overrightarrow{\text{ع ل}} \Leftarrow$ س ص = ع ل

$\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ع ل}}$

شكل س ص ع ل متوازي أضلاع

ومن توازي ضلعين في الشكل الرباعي

س ص = $\frac{1}{2}$ ب ء ، ص ع = $\frac{1}{2}$ ب ء

نثبت أن ب ء أن:

س ص = ل ع = $\frac{1}{2}$ أ جـ

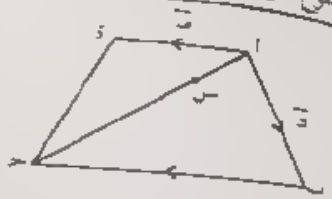
نحط س ص ع ل

= س ص + ص ع + ع ل + س ل

= $\frac{1}{2}$ أ جـ + $\frac{1}{2}$ ب ء + $\frac{1}{2}$ أ جـ + $\frac{1}{2}$ ب ء

= أ جـ + ب ء

مجموع قطري الشكل الرباعي أ ب جـ ء



معطى أ ب جـ ء شبه منحرف

$\overline{\text{أء}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، أء = $\frac{1}{2}$ ب جـ

ب = $\overrightarrow{\text{ء}}$ ، $\overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{هـ}}$

مطلوب: أولاً: التعبير بدلالة $\overrightarrow{\text{هـ}}$، $\overrightarrow{\text{ء}}$

عن كل من $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$، $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$، $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$، $\overrightarrow{\text{ء ب}}$

ثانياً: إثبات أن $\overline{\text{أ جـ}}$، $\overline{\text{س ب}} \in$ س = $\frac{1}{3}$ أ جـ

ثالثاً: أن النقط ء، س، ب على استقامة واحدة

برهان $\overline{\text{أء}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، أء = $\frac{1}{2}$ ب جـ

$\overrightarrow{\text{أء}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = 2\overrightarrow{\text{أء}}$

$\overrightarrow{\text{ب جـ}} = 2\overrightarrow{\text{هـ}}$ ..... (١)

في Δ أ ب جـ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$

$\overrightarrow{\text{ء}} + 2\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$ .. (٢)

في Δ أ ء جـ $\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$

$\overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{هـ}}$ ومن (٢)

$\overrightarrow{\text{هـ}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}} = \overrightarrow{\text{ء}} + 2\overrightarrow{\text{هـ}}$

في Δ أ ب جـ: $\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} = \overrightarrow{\text{أب}}$

$\overrightarrow{\text{هـ}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} = \overrightarrow{\text{أب}}$

$\overrightarrow{\text{ء ب}} = \overrightarrow{\text{أب}} - \overrightarrow{\text{هـ}}$ ..... (٤)

من (١)، (٢)، (٣)، (٤) المطلوب أولاً

لإثبات المطلوب الثاني صل $\overline{\text{ء س}}$، $\overline{\text{س ب}}$

في Δ أ س ء:

$\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ء س}} = \overrightarrow{\text{أ س}}$ ..... (٥)

$\overrightarrow{\text{أ س}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ وهما على خط واحد

$\overrightarrow{\text{أ س}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{أ جـ}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\text{ء}} + 2\overrightarrow{\text{هـ}})$

عوض في (٥)

$\overrightarrow{\text{هـ}} + \overrightarrow{\text{ء س}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\text{ء}} + 2\overrightarrow{\text{هـ}})$

$\overrightarrow{\text{ء س}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{ء}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{هـ}} - \overrightarrow{\text{هـ}}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{ء}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{هـ}}$

$\overrightarrow{\text{ء س}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\text{ء}} - 2\overrightarrow{\text{هـ}})$ .. (٦)

في Δ س ب جـ:

$\overrightarrow{\text{ب س}} + \overrightarrow{\text{س جـ}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

$\overrightarrow{\text{ب س}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}} - \overrightarrow{\text{س جـ}}$

$= 2\overrightarrow{\text{هـ}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

$= 2\overrightarrow{\text{هـ}} - \frac{2}{3}(\overrightarrow{\text{ء}} + 2\overrightarrow{\text{هـ}})$

$= 2\overrightarrow{\text{هـ}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{ء}} - \frac{4}{3}\overrightarrow{\text{هـ}}$

$\overrightarrow{\text{ب س}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{هـ}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{ء}}$

$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{\text{هـ}} - \overrightarrow{\text{ء}})$ .. (٧)

من (٦)، (٧)، $3\overrightarrow{\text{ء س}} = 2\overrightarrow{\text{ب س}}$

$3\overrightarrow{\text{ء س}} = 2\overrightarrow{\text{ب س}}$

$\overrightarrow{\text{ء س}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{ب س}}$

$\overline{\text{ء س}}$ ، $\overline{\text{ب س}}$ وهما مشتركتان في

نقطة واحدة س

ء، س، ب على استقامة واحدة

إرشادات تمارين (٧) تطبيقات فيزيائية (محصلة القوى)

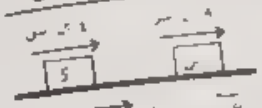
إرشادات تمارين (٨) تطبيقات فيزيائية (السرعة المنتظمة)

(١)

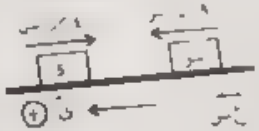
$-٧٠ ى - ٣٠ ى = -٤٠ ى$

$= -٧٠ ى - ٣٠ ى = -١٠٠ ى$

(٢)

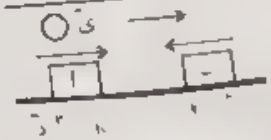


$-٤٠ ى - ٩٠ ى = -٥٠ ى$



$-٤٠ ى - ٩٠ ى = -١٣٠ ى$

(٣١)



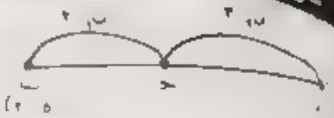
$-١١٠ ى - ٣٠ ى$

$= (-١١٠ + ٣٠) ى$

$= -٨٠ ى$

السرعة المحصلة للسيارة = ٨٠ كم/س

إرشادات الوحدة الخامسة
الخط المستقيم
إرشادات تمارين (١)
على تقسيم قطعة مستقيم



$\overrightarrow{ر}_١ = (س_١ ، ص_١) = (-١ ، ٧)$

$\overrightarrow{ر}_٢ = (س_٢ ، ص_٢) \quad (٥ ، ٢)$

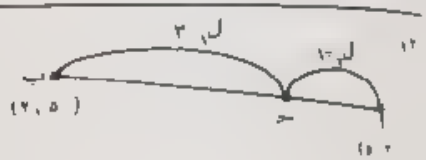
$\overrightarrow{ر} = جـ = (س ، ص)$

$\overrightarrow{ر} = \dfrac{ل_١ \overrightarrow{ر}_١ + ل_٢ \overrightarrow{ر}_٢}{ل_١ + ل_٢}$

$\overrightarrow{ر} = \dfrac{٢(-١ ، ٧) + ٣(٥ ، ٢)}{٢ + ٣}$

$\overrightarrow{ر} = \dfrac{(١٣ ، ٢٠)}{٥}$

نقطة جـ = $(\frac{١٣}{٥} ، ٤)$



$\overrightarrow{ر}_١ = (٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ر}_٢ = (-٥ ، ٢)$

$\overrightarrow{ر} = جـ = (س ، ص)$

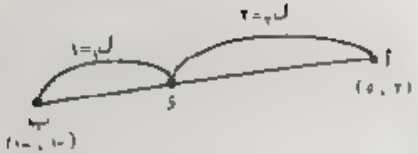
$\overrightarrow{ر} = \dfrac{ل_١ \overrightarrow{ر}_١ + ل_٢ \overrightarrow{ر}_٢}{ل_١ + ل_٢}$

$\overrightarrow{ر} = \dfrac{٣(٢ ، ٥) + ١(-٥ ، ٢)}{٣ + ١}$

$\overrightarrow{ر} = \dfrac{(١ ، ١٧)}{٤}$

نقطة جـ = $(\frac{١}{٤} ، \frac{١٧}{٤})$

(٣)



$\overrightarrow{ر}_١ = (٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ر}_٢ = (-١ ، -١)$

$\overrightarrow{ر} = ء = (س ، ص)$

$\overrightarrow{ر} = \dfrac{ل_١ \overrightarrow{ر}_١ + ل_٢ \overrightarrow{ر}_٢}{ل_١ + ل_٢}$

$\overrightarrow{ر} = \dfrac{(٢ ، ٥) + ٢(-١ ، -١)}{١ + ٢}$

$\overrightarrow{ر} = \dfrac{(٠ ، ٣)}{٣} = (٠ ، ١)$

∴ نقطة ء = $(٠ ، ١)$

(٤) ٥ أجـ = ٣ أب

$\therefore \dfrac{أجـ}{أب} = \dfrac{٣}{٥}$ ، $\dfrac{أجـ}{جـب} = \dfrac{٣}{٢}$

$\overrightarrow{ر}_١ = (٤ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ر}_٢ = (-٥ ، -١)$

$\because \overrightarrow{ر} = جـ = (س ، ص)$

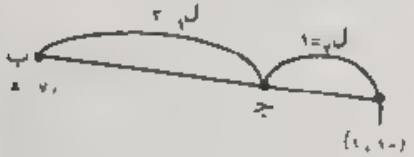
$\overrightarrow{ر} = \dfrac{ل_١ \overrightarrow{ر}_١ + ل_٢ \overrightarrow{ر}_٢}{ل_١ + ل_٢}$

$\therefore \overrightarrow{ر} = \dfrac{٢(٤ ، ٢) + ٣(-٥ ، -١)}{٢ + ٣}$

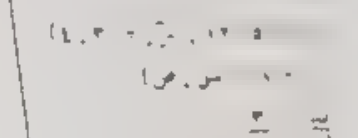
$\overrightarrow{ر} = \dfrac{(-٧ ، ١)}{٥} = (\frac{-٧}{٥} ، \frac{١}{٥})$

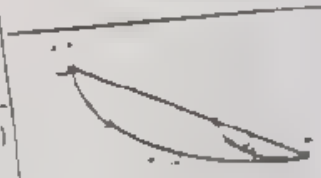
∴ نقطة جـ = $(\frac{-٧}{٥} ، \frac{١}{٥})$

(٥)



$\overrightarrow{ر}_١ = (-١ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ر}_٢ = (٧ ، ٥)$





(٨)

نفرض ر (ح) منتصف ر ب

ر = (٣ ، -٢) ، ر = (-٢ ، ٤)

ر = ح = (س ، ص)

ر = (ل₁ ر + ل₂ ر) / (ل₁ + ل₂)

(٨ ، -٨) = (ل₁(٣ ، -٢) + ل₂(-٢ ، ٤)) / (ل₁ + ل₂)

(٨ ، -٨) = (٣ل₁ - ٢ل₂ ، -٢ل₁ + ٤ل₂) / (ل₁ + ل₂)

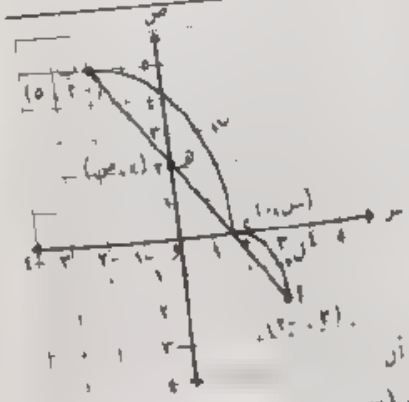
٨ = (٣ل₁ - ٢ل₂) / (ل₁ + ل₂)

⇐ ٨ل₁ + ٨ل₂ = ٣ل₁ - ٢ل₂

٥ل₁ = -١٠ل₂

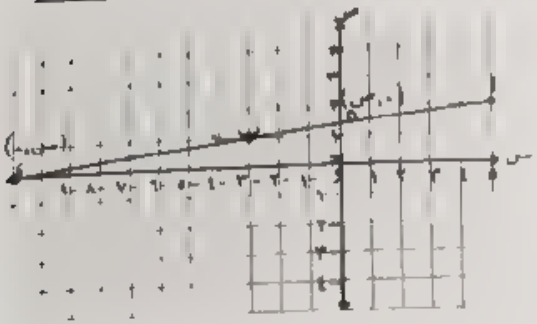
ل₁ / ل₂ = -٢ / ١ < ٠ التقسيم من الخارج

(٩)



نفرض أن

ر = (٣ ، -٢) ، ر = (-٢ ، ٥)



∴ صفر = (ل₁ × ٢ + ل₂ × ١) / (ل₁ + ل₂)

∴ ٢ل₁ = -ل₂ ∴ ل₂ / ل₁ = ٢ / -١ < ٠

∴ النسبة سالبة ∴ التقسيم من الخارج

∴ س = (-١ × ٢ + ٥ × -٣) / (٢ + -١)

= (-٥ - ٦) / ١ = -١١

∴ ء = (-١١ ، ٠)

ثانيًا : التقاطع مع محور الصادات

ويفرض أن نقطة هـ (٠ ، ص) تقع على محور الصادات وتقع بينهما .

∴ س = (ل₁س₁ + ل₂س₂) / (ل₁ + ل₂)

∴ صفر = (ل₁ × ٥ + ل₂ × -٣) / (ل₁ + ل₂)

∴ ٥ل₁ = ٣ل₂ ∴ ل₂ / ل₁ = ٥ / ٣ < ٠

∴ النسبة موجبة ∴ التقسيم من الداخل

∴ ص = (٣ × ٢ + ٥ × ١) / (٥ + ٣) = ١١ / ٨

∴ هـ = (٠ ، ١١ / ٨)

(١١) بفرض أن التقسيم من الداخل هكذا :

التقاطع مع محور السينات

ويفرض أن نقطة (ء) بينهما على اعتبار أن ء = (س ، ٠)

∴ س = (ل₁س₁ + ل₂س₂) / (ل₁ + ل₂)

∴ صفر = (ل₁ × -٢ + ل₂ × ٥) / (ل₁ + ل₂)

∴ ٢ل₂ = ٥ل₁ ∴ ل₂ / ل₁ = ٢ / ٥ < ٠

∴ النسبة موجبة ∴ التقسيم من الداخل كما هو واضح من الرسم

والنسبة ل₂ : ل₁ = ٢ : ٥

∴ س = (٥ × ٣ + ٢ × -٢) / (٥ + ٢) = ١١ / ٧

∴ ء = (١١ / ٧ ، ٠)

ثانيًا : التقاطع مع محور الصادات

ويفرض أن نقطة (هـ) بينهما على اعتبار أن ء = (٠ ، ص)

∴ س = (ل₁ × ٣ + ل₂ × -٢) / (ل₁ + ل₂)

∴ صفر = ٣ل₁ - ٢ل₂

∴ ل₂ / ل₁ = ٣ / ٢ < ٠ ∴ النسبة موجبة

∴ التقسيم من الداخل أيضًا

والنسبة ل₂ : ل₁ = ٣ : ٢

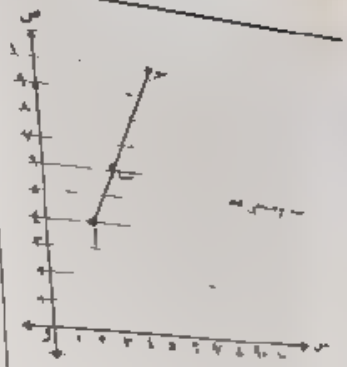
∴ ص = (٢ × -٢ + ٣ × ٥) / (٣ + ٢) = ١١ / ٥

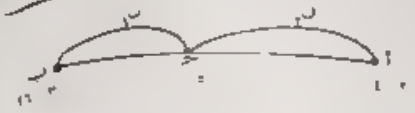
هـ = (٠ ، ١١ / ٥)

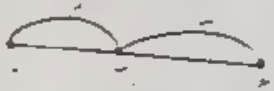
(١٠) أولاً : التقاطع مع محور السينات

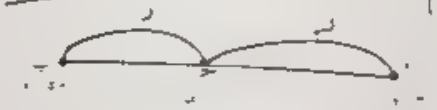
ويفرض أن نقطة (ء) = (س ، ٠) وهي من الداخل تقسم $\overline{أب}$

∴ ص = (ل₁ص₁ + ل₂ص₂) / (ل₁ + ل₂)









إرشادات تمارين (٢)
مراجعة على معادلة الخط المستقيم

المعادلة الكارتيزية بدلالة معه وميل

$\frac{ص + ٤}{س - ٣} = ١$ ∴ س − ٣ = ص + ٤

ص − س + ٧ = ٠

(٣) [أ] متجه اتجاه $\overrightarrow{ى}$ = (١، ٣) − (٤، ٦)

= (−٣، −٣)

$\overrightarrow{ر}$ = (١، ٣) + ك(−٣، −٣)

س = ٣ − ٣ك

، ص = ١ − ٣ك الوسيطتان

$\frac{س - ٣}{-٣} = \frac{ص - ١}{-٣}$

∴ −٣س + ٩ = −٣ص + ٣

∴ ٣س − ٣ص − ٦ = ٠ الكارتيزية

[ب] $\overrightarrow{ى}$ = (٠، ب) − (١، ٠) = (−١، ب)

$\overrightarrow{ر}$ = (١، ٠) + ك(−١، ب) المتجهة

س = ١ + ك، ص = ب ك

الوسيطتان

$\frac{س - ١}{-١} = \frac{ص}{ب}$

−ب س + ب = ص

ص + ب س − ب = ٠ الكارتيزية

[جـ] متجه اتجاه = (٣، ٢) − (٣، ٥)

= (٠، −٣)

المعادلة المتجهة هي :

$\overrightarrow{ر}$ = (٣، ٢) + ك(٠، −٣)

الوسيطتان س = ٣ ، ص = ٢ − ٣ك

المعادلة الكارتيزية هي ص = ٢

وهي موازي محور السينات

(٤) متجه اتجاه $\overrightarrow{ى}$ = (١، ٠) − (٤، ٢)

= (−٣، −٢)

$\overrightarrow{ر}$ = (١، ٠) + ك(−٣، −٢)

س = ١ − ٣ك ، ص = −ك

الوسيطتان

$\frac{س - ١}{-٣} = \frac{ص}{-٢}$

−٢س + ٢ = −٣ص

∴ ٢س − ٣ص − ٢ = ٠ الكارتيزية

(٥) [أ] $\overrightarrow{ى}$ = (٥، ٠) − (٣، ١) = (٢، −١)

م = $\frac{-١}{٢}$ = صفر

المستقيم يوازي محور السينات

ويمر بالنقطة (٣، −١)

∴ معادلة المستقيم : ص = −١

(٦) يوازي محور السينات

متجه اتجاه أي مستقيم يوازي محور

السينات = (١، ٠) حيث أ ∈ ح

∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٥، ٦) + ك(١، ٠)

(٧) $\overrightarrow{ى}$ (متجه اتجاه المستقيم)

= (٤، ٢) − (٠، ٠) = (٤، ٢)

$\overrightarrow{ر}$ = (٠، ٠) + ك(٤، ٢)

أو $\overrightarrow{ر}$ = (٤، ٢) + ك(٤، ٢)

ملحوظة : الحل ليس وحيد

(٨) م = $\frac{١}{٢}$ ، $\overrightarrow{ى}$ = (٢، ١)

المعادلة المتجهة

$\overrightarrow{ر}$ = (−١، ٢) + ك(٢، ١)

(٩) ميل المستقيم = $\frac{-١}{٢}$

معادلة المستقيم = $\frac{ص + ٥}{س - ٣}$ = $\frac{-١}{٢}$

س = ١ ، ص = −١ + ٣ك الوسيطتان

المعادلة في صورته العامة س = ١

وهي يوازي محور الصادات.

$\frac{ص + ١}{س - ٢} = \frac{٣}{١}$

ص + ١ = ٣س − ٦

ص − ٣س + ٧ = ٠

(١، ٧) يمر بالمستقيم ∴ يحققه

٧ − ١٢ + ٧ = ٠

١٢ = ١٤ ، أ = ٧

(٥، ب) يمر بالمستقيم يحققه

ب − ٢ × ٥ + ٧ = ٠ ، ب = ٣

لاحظ أن :

س = ٣ − ٢ك ، ص = −١ + ٣ك

∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٣، −١) + ك(−٢، ٣)

متجه الاتجاه هو (−٢، ٣)

وهو يوازي المستقيم المطلوب

∴ م = م

∴ متجه اتجاه المطلوب = (−٢، ٣)

∴ $\overrightarrow{ر}$ = (١، −١) + ك(−٢، ٣) المتجهة

∴ س = ١ − ٢ك ، ص = −١ + ٣ك

الوسيطتان

$\frac{س - ١}{-٢} = \frac{ص + ١}{٣}$

∴ ٣س − ٣ = −٢ص − ٢

∴ ٣س + ٢ص − ١ = ٠

(١٢) إذا كان المستقيم يوازي محور الصادات

∴ متجه الاتجاه هو (٠، ب)

∴ المعادلات :

$\overrightarrow{ر}$ = (س، ص) + ك(٠، ب) المتجهة

، س = س ، ص = ص + ب ك

الوسيطتان

∴ المعادلة الكارتيزية : س = س

ثانيًا : إذا كان يوازي محور السينات

∴ متجه الاتجاه هو (١، ٠)

∴ المعادلات :

$\overrightarrow{ر}$ = (س، ص) + ك(١، ٠) المتجهة

، س = س + ك ، ص = ص

الوسيطتان

∴ المعادلة الكارتيزية : ص = ص

ثالثًا : يمر بنقطة الأصل

∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٠، ٠) + ك(١، ب) المتجهة

∴ س = ك ، ص = ك ب الوسيطتان

$\frac{س}{١} = \frac{ص}{ب}$

∴ ب س − ١ ص = ٠ الكارتيزية

إرشادات تمارين (٤)
على متجه اتجاه العمود للمستقيم

(١) المتجه العمودي (−١، ٢)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب

= (٢، ١)

∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٢، −٣) + ك(٢، ١) المتجهة

∴ س = ٢ + ٢ك ، ص = −٣ + ك

الوسيطتان

$\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص + ٣}{١}$

∴ س − ٢ = ٢ص + ٦

∴ س − ٢ص − ٨ = ٠ الكارتيزية

(٢) ميل المستقيم المعطى هو م = $\frac{-١}{١}$ = −١

∴ متجه اتجاه المعطى (١، −١)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (١، ١)

∴ المعادلات :

$\overrightarrow{ر}$ = (٢، −١) + ك(١، ١) المتجهة

س = ٢ + ك ، ص = −١ + ك

الوسيطان

$\frac{\text{س} - ٢}{١} = \frac{\text{ص} + ١}{١}$

س − ص − ٣ = ٠ الكارتيزية

(٣) متجه اتجاه المستقيم المعطى (٤ ، ٣)

متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (٣ ، −٤)

∴ المعادلات:

$\vec{ر}$ = (٥ ، ٧) + ك(٣ ، −٤) المتجهة

س = ٥ + ٣ك ، ص = ٧ − ٤ك

الوسيطان

$\frac{\text{س} - ٥}{٣} = \frac{\text{ص} - ٧}{-٤}$

٣ص − ٢١ = −٤س + ٢٠

٤س + ٣ص − ٤١ = ٠ الكارتيزية

(٤) متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (٢ ، ٧)

المعادلات

$\vec{ر}$ = (٠ ، ٠) + ك(٢ ، ٧) المتجهة

س = ٢ك ، ص = ٧ك الوسيطان

$\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص}}{٧}$

٧س − ٢ص = ٠ الكارتيزية

[أ] $\frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{٣} = ١$ بالضرب × ٦

٣س + ٢ص − ٦ = ٠

$\frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{-٤} = ١$ بالضرب × ١٢

٤س − ٣ص − ١٢ = ٠

[ب] بالقسمة على ٩

$\frac{٢\text{س}}{٩} - \frac{٥\text{ص}}{٩} = ١$

$\frac{\text{س}}{\frac{٩}{٢}} + \frac{\text{ص}}{\frac{-٩}{٥}} = ١$

الجزءان هما $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{-٩}{٥}$

[ب] بالقسمة على ٨

$\frac{٢\text{س}}{٨} - \frac{٥\text{ص}}{٨} = ١$

$\frac{\text{س}}{٤} + \frac{\text{س}}{\frac{-٨}{٥}} = ١$

الجزءان هما ٤ ، $\frac{-٨}{٥}$

[جـ] ٢س − ص = .

∴ المعادلة لا تقطع المحورين إلا في نقطة الأصل ، الجزءان صفر ، صفر

[د] ص = ٣ ، $\frac{\text{ص}}{٣} = ١$

∴ الجزء المقطوع من محور السينات = صفر

، الجزء المقطوع من محور الصادات = ٣

المستقيم يوازي محور السينات .

[هـ] $\frac{\text{س}}{٢} = ١$

∴ الجزء المقطوع من محور السينات = ٢ ،

والجزء المقطوع من محور الصادات = صفر

∴ المستقيم يوازي محور الصادات

(٨) $\frac{\text{س}}{٤} + \frac{\text{ص}}{-٥} = ١$ بالضرب × ٢٠

٥س − ٤ص − ٢٠ = ٠

إرشادات تمارين (٥) على قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين

(١) المستقيم الأول متجه الاتجاه = (−٢ ، ١)

∴ $م_١ = \frac{-١}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

∴ ظا هـ = $\left|\frac{م_٢ - م_١}{١ + م_٢ م_١}\right|$

$= \left|\frac{\frac{١}{٢} - \frac{-١}{٢}}{١ + \frac{-١}{٢} \times \frac{١}{٢}}\right|$

∴ ظا هـ = $\left|\frac{١}{٣}\right| = \frac{٤}{٣}$

∴ و(هـ) = ٥٣° ٧َ ٤٨ً

(٢) $م_١ = \frac{-٤}{٥}$ ، $م_٢ = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

∴ ظا هـ = $\left|\frac{م_٢ - م_١}{١ + م_٢ م_١}\right|$

$= \left|\frac{\frac{٢}{٣} - \frac{-٤}{٥}}{١ + \frac{٢}{٣} \times \frac{-٤}{٥}}\right| = \left|\frac{\frac{٢٢}{١٥}}{\frac{٧}{١٥}}\right|$

∴ ظا هـ = $\frac{٢٢}{٧}$

∴ و(هـ) = ٧٢ ٢٠َ ٥٩ً°

(٣) $م_١ = \frac{١}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{-١}{٣}$

∴ ظا هـ = $\left|\frac{\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢}}{١ + \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢}}\right| = ١$

∴ و(هـ) = ٤٥°

(٤) $م_١ = \frac{-٣}{٤}$ ، $م_٢ = \frac{١}{٤}$

∴ ظا هـ = $\left|\frac{\frac{١}{٤} - \frac{-٣}{٤}}{١ + \frac{١}{٤} \times \frac{-٣}{٤}}\right| = \frac{١٦}{١٣}$

∴ و(هـ) = ٥٠° ٥٤َ ٢٢ً

(٥) $م_١ = \frac{-١}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{٢}{٣}$

∴ ظا θ = $\left|\frac{\frac{٢}{٣} - \frac{-١}{٢}}{١ + \frac{٢}{٣} \times \frac{-١}{٢}}\right| = \frac{\frac{٧}{٦}}{\frac{٢}{٣}}$

∴ ظا θ = $\frac{٧}{٤}$ ∴ و(θ) = ٦٠° ١٥َ ١٨ً

(٦) $م_١$ = −١ ، م محور السينات = صفر

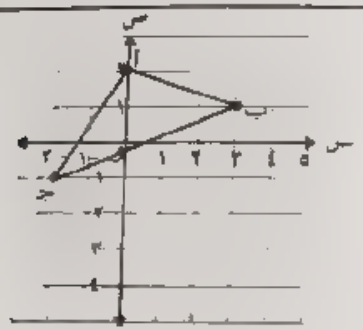
∴ ظا هـ = $\left|\frac{٠ - -١}{١ + ٠}\right| = ١$

∴ و(هـ) = ٤٥°

∴ ظا هـ = $\left|\frac{٣ + ٣}{١ + ٣ \times ٣}\right| = \left|\frac{٦}{-٨}\right| = \frac{٣}{٤}$

∴ و(هـ) = ٣٦° ٥٢َ ١١ً

(٨)



∵ $(\text{ب جـ})^٢ = (٣ + ٢)^٢ + (١ + ١)^٢$

∴ $(\text{ب جـ})^٢ = ٢٥ + ٤ = ٢٩$

∴ $(\text{أ ب})^٢ = (٣ - ٠)^٢ + (١ - ٢)^٢$

= ٩ + ١ = ١٠

∴ $(\text{أ جـ})^٢ = (٢)^٢ + (٣)^٢$

= ٤ + ٩ = ١٣

∴ $(\text{ب جـ})^٢ > (\text{أ ب})^٢ + (\text{أ جـ})^٢$

∴ أ زاوية منفرجة

ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} = \frac{١ - ٢}{٣ - ٠} = \frac{-١}{٣}$

ميل $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}} = \frac{١ + ٢}{٢ - ٠} = \frac{٣}{٢}$

∴ ظا أ = $\left|\frac{\frac{٣}{٢} - \frac{-١}{٣}}{١ + \frac{٣}{٢} \times \frac{-١}{٣}}\right| = \frac{\frac{-١١}{٦}}{\frac{١}{٢}}$

∴ ظا أ = $\frac{-١١}{٣}$

∴ و(أ) = ١٠٥° ١٥َ ١٨ً

(٩) ميل المستقيم الواصل بين النقطتين

م = $\frac{٠ - -١}{١ + ٠} = ١$

∴ ظا هـ = ١ ∴ و(هـ) = ٤٥°

(١٠) ∴ $م_١ = \frac{٣}{٣} = ١$ ، $م_٢ = ٢$

بعد نقطة معلومة (أ) على طول عمود على خط مستقيم من نقطة

٩ معادلة المستقيم $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} + ٣} = \frac{-٣}{٤}$

$٤\text{ص} - ١٢ = -٣\text{س} - ٩$

$٤\text{ص} + ٣\text{س} - ٣ = ٠$

طول العمود $= \frac{|٤ \times ٠ + ٣ \times ٠ - ٣|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

$= \frac{٣}{٥}$ وحدة طول

١٠ معادلة المستقيم $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ٣} = \frac{٥}{١٢}$

$١٢\text{ص} - ١٢ = ٥\text{س} - ١٥$

$٥\text{س} - ١٢\text{ص} - ٣ = ٠$

طول العمود $= \frac{|٥ \times ٤ - ١٢ \times ٠ - ٣|}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}}$

$= \frac{٤١}{١٣}$ وحدة طول

(١١) أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ بدلالة المتغير

$\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٢} = \frac{٠ - ٣}{٢ - -٢} = \frac{-٣}{٤}$

$٤\text{ص} - ١٢ = -٣\text{س} + ٦$

$٤\text{ص} + ٣\text{س} - ١٨ = ٠$

∴ طول العمود $= \frac{|٣ \times ٤ + ٤ \times ٠ - ١٨|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

$= \frac{١٨}{٥} = ٣,٦$ وحدة طول

(١٢) $\text{م}_١ = \frac{-٥}{١٢}$ ، $\text{م}_٢ = \frac{-١٠}{٢٤} = -\frac{٥}{١٢}$

$\text{م}_١ = \text{م}_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان

بفرض أن نقطة على المستقيم الأول

١ س = ٢ + ٥ ك ، ص = ٥ + ١٢ ك

$\frac{\text{س} - ٢}{٥} = \frac{\text{ص} - ٥}{١٢}$

∴ ١٢س − ٢٤ = ٥ص − ٢٥

∴ ١٢س − ٥ص + ١ = ٠

∴ طول العمود $= \frac{|١٢ \times ٢ - ٥ \times ٠ + ١|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥}}$

$= \frac{٢٥}{١٣}$ وحدة طول

١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة

طول ... = ٥ وحدة

إيجاد معادلة ... وإيجاد طول العمود من ا إلى المستقيم ...

إيجاد معادلة المستقيم ...

$\frac{ص - ١}{س - ٦} = \frac{١ - ٣}{٦ - ٥} = \frac{٢}{١-}$

-ص + ١ = -٢س + ١٢

٢س + ص - ١٣ = ٠

طول العمود من ا إلى ...

$= \frac{|٢ \times ٢ + ١ - ١٣|}{\sqrt{٢^٢ + ١^٢}}$

طول العمود $= \frac{٨}{\sqrt{٥}} = \frac{٨\sqrt{٥}}{٥}$ وحدة طول

مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ (مجموع القاعدتين المتوازيين) × الارتفاع

$= \frac{١}{٢} \times (٢\sqrt{٥} + \sqrt{٥}) \times \frac{٨\sqrt{٥}}{٥}$

= ١٢ وحدة مربعة

إرشادات تمارين (٧) على المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

١) (س - ٤ص + ٥) + ك(س + ٧ص - ١٧) = ٠

عوض عن النقطة س = ٤ ، ص = ٢

(٤ - ٨ + ٥) + ك(٤ + ١٤ - ١٧) = ٠

١ + ك = ٠ ∴ ك = -١

(س - ٤ص + ٥) - (س + ٧ص - ١٧) = ٠

-١١ص + ٢٢ = ٠ ∴ ص = ٢

(٢) ٣س - ٢ص + ٢٥ + ك(٢ص + ٥س - ٢٣) = ٠

عوض عن س = ٢ ،

٣ × ٢ - ٢(٢ + ١٠ - ٢٣) + ك(٢ + ٢٥ - ٢٣) = ٠

٦ - ١١ك = ٠ ∴ ١١ك = ٢٩

ك = $\frac{٢٩}{١١}$

٣س - ٢ص + ٢٥ + $\frac{٢٩}{١١}$(٢ص + ٥س - ٢٣) = ٠

٣٣س - ٢٢ص + ٢٧٥ + ٢٩(٢ص + ٥س - ٢٣) = ٠

٣٣س - ٢٢ص + ٢٧٥ + ٥٨ص + ١٤٥س - ٦٦٧ = ٠

١٧٨س + ٣٦ص - ٣٩٢ = ٠

٨٩س + ١٨ص - ١٩٦ = ٠

١٢) (س ، ص) = (-٢ ، ٠) + ك(٣ ، ٢)

∴ س = -٢ + ٣ك ، ص = ٢ك

∴ $\frac{س + ٢}{٣} = \frac{ص}{٢}$

∴ ٢س + ٤ = ٣ص

∴ ٢س - ٣ص + ٤ = ٠

∴ المعادلة العامة للمستقيمين معًا

∴ ٣س + ٢ص - ٧ + ك(٢س - ٣ص + ٤) = ٠

عوض عن س = ٣ ، ص = ٤

∴ ٣ × ٣ + ٢ × ٤ - ٧ + ك(٢ × ٣ - ٣ × ٤ + ٤) = ٠

∴ ١٠ - ٢ك = ٠ ∴ ك = ٥

∴ ٣س + ٢ص - ٧ + ٥(٢س - ٣ص + ٤) = ٠

∴ ١٣س - ١٣ص + ١٣ = ٠

∴ س - ص + ١ = ٠

∴ $\frac{س}{-٢} = \frac{ص}{٢}$

٢س = -٢ص ∴ ٢س + ٢ص = ٠

س + ص = ٠

إيجاد نقطة التقاطع

∴ س = -ص عوض في المعادلة الثانية

∴ -٣ص - ٢ص = ١٣ ∴ -٥ص = ١٣

∴ ص = $\frac{-١٣}{٥}$ ، س = $\frac{١٣}{٥}$

∴ النقطة ($\frac{-١٣}{٥}$ ، $\frac{١٣}{٥}$)

المستقيم يمر بالنقطة السابقة ويوازي محور الصادات ∴ المعادلة س = $\frac{١٣}{٥}$

(٥) ٢ص - س - ٢ + ك(٤ص + ٣س - ٢٤) = ٠ .... (١)

∴ (٣ك - ١)س + (٢ + ٤ك)ص - (٢ + ٢٤ك) = ٠

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-(٣ك - ١)}{٢ + ٤ك}$

∴ ميل المستقيم الثاني = $\frac{-٣}{٤}$

شرط المسألة : ميل المستقيم المطلوب عمودي على المستقيم الثاني

∴ حاصل ضرب ميلهما = -١

∴ $\frac{-(٣ك - ١)}{٢ + ٤ك} \times \frac{-٣}{٤} = -١$

∴ $\frac{٩ك - ٣}{٨ + ١٦ك} = -١$

∴ ٨ + ١٦ك = -٩ك + ٣

∴ ٢٥ك = -٥

∴ ك = $-\frac{١}{٥}$ بالتعويض في (١)

∴ ٢ص - س - ٢ - $\frac{١}{٥}$(٤ص + ٣س - ٢٤) = ٠

[illegible] ص − ٦ ص − ٣س + ٢٤ = ٠

٣ص − ٨س + ١٤ = ٠ ، (−٢)

٣ص − ٤س + ٧ = ٠

(٦) معادلة المستقيم المطلوب بدلالة (ك) هي

٣ص − ٤س + ١٥ + ك(٤ص + ٣س − ١٦) = ٠

(٣ + ٣ك)ص + (٤ك − ٤)س

+ ١٥ − ١٦ك = ٠

ميل المستقيم المطلوب = −(٤ك − ٤) / (٣ + ٣ك)

ميل المستقيم المعلوم = ٣

ميل المستقيم المطلوب

∵ المستقيمان متوازيان فبينهما متساويان

−(٤ك − ٤) / (٣ + ٣ك) = ٣ / ١

٩ + ٩ك = −٤ك + ٤

١٣ك = −٥ ∴ ك = −٥ / ٩

٣ص − ٤س + ١٥ − ٥/٩ (٤ص + ٣س − ١٦) = ٠

٣٧ص − ٢٧س + ١٣٥ − ٢٠ص − ١٢س + ١٤٤ = ٠

١٧ص − ٣٩س − ٢٤٧ = ٠ (÷ ١٣)

ص − ٣س + ١٩ = ٠

[illegible] نقطة التقاطع

∴ س = −١٠ ، ص = ٣

٧ [illegible]

٣ص − س + ٢ = ٠

٣ص + س + ١٠ = ٠

٤ص = −١٢ ∴ ص = −٣

س = −٤

نقطة التقاطع (−٤ ، −٣)

ميل المستقيم المطلوب = −٤ / ٣

ميل المستقيم العمودي عليه = ٣ / ٤

معادلة المستقيم [illegible] ومار بنقطة

وميل هو [illegible]

٤ص + ١٢ = ٣س + ١٢

∴ ٤ص = ٣س

(٨) نقطة التقاطع (١ ، ٣) والميل ٢/٣

∵ معادلة المستقيم : (ص − ٣) / (س − ١) = ٢/٣

٣ص − ٩ = ٢س − ٢

٣ص − ٢س − ٧ = ٠

الطريقة الثانية : معادلة المستقيم المطلوب بدلالة (ك)

ص − س − ٢ + ك(٣ص − ٣س − ٣) = ٠

∴ (١ + ٣ك)ص − (١ + ٢ك)س − ٢ − ٣ك = ٠ ..... (١)

ميل المستقيم هو −(١ + ٣ك) / (١ + ٢ك)

وهو يساوي الميل المعطى ٢/٣

−(١ + ٣ك) / (١ + ٢ك) = ٢/٣

٣ + ٩ك = ٢ + ٤ك

٥ك = −١ ∴ ك = −١/٥

عوض عن ك في (١)

∴ ص − س − ٢ − ١/٥ (٣ص − ٣س − ٣) = ٠

٥ص − ٥س − ١٠ − ٣ص + ٣س + ٣ = ٠

∴ ٢س − ٢س − ٧ = ٠ المعادلة المطلوبة

(٩) إذا قمنا بحل المعادلتين

نجد أن نقطة التقاطع (٤/٥ ، ٣/٥)

والمستقيم موازي لمحور السينات

ص = ٣/٥

الطريقة الثانية :

[illegible] (ص − ٢س + ١) = ٠

[illegible] (١ + ٢ك)ص − (١ + ٢ك)س − ١ + ك = ٠

[illegible] موازي لمحور السينات

الميل = صفر

(١ + ٢ك) / (٣ + ك) = ٠

∴ ك = −١/٢

ص − س − ١ − ١/٢ (ص − ٢س + ١) = ٠

ص − س − ٢ − ص + ٢س − ١ = ٠

ص − ٣ = ٠ ∴ ص = ٣

نقطة التقاطع (−٨/٧ ، ٢٥/٧)

شرط المسألة : س/١ + ص/١ = ١ .. (١)

عوض عن س = −٨/٧ ، ص = ٢٥/٧

١ = ١٧/٧ بالتعويض في (١)

٧س/١٧ + ٧ص/١٧ = ١

∴ المعادلة : ٧س + ٧ص − ١٧ = ٠

الطريقة الثانية :

٢س − ٣ص + ١٣ + ك(٢ص + س − ٦) = ٠

(٢ + ك)س + (٢ك − ٣)ص + (١٣ − ٦ك) = ٠

∴ (٢ + ك)س + (٢ك − ٣) = (٦ك − ١٣)

بالقسمة على (٦ك − ١٣)

∴ س / ((٦ك − ١٣) / (٢ + ك)) + ص / ((٦ك − ١٣) / (٢ك + ٣)) = ١

شرط المسألة :

الجزءان المقطوعان متساويان

∴ (٦ك − ١٣) / (٢ + ك) = (٦ك − ١٣) / (٢ك + ٣)

∴ ٢ + ك = ٢ك − ٣ ∴ ك = ٥

المعادلة :

٢س − ٣ص + ١٣ + ٥(٢ص + س − ٦) = ٠

٢س − ٣ص + ١٣ + ١٠ص + ٥س − ٣٠ = ٠

٧س + ٧ص − ١٧ = ٠

(١١) يصنع مع محور الصادات الموجب زاوية قياسها ١٣٥°

∴ يعمل مع محور السينات الموجب زاوية قياسها ٤٥°

∴ الميل = طا ٤٥° = ١

نقطة التقاطع (٤ ، −٢)

∴ المعادلة : (ص + ٢) / (س − ٤) = ١

∴ المعادلة : ص + ٢ = س − ٤

∴ ص − س + ٦ = ٠

الطريقة الثانية :

(٢س + ٣ص − ٢) + ك(٣س − ص − ١٤) = ٠

(١) .....

∴ (٢ + ٣ك)س + (٣ − ك)ص − ٢ − ١٤ك = ٠

الميل : −(٢ + ٣ك) / (٣ − ك) = ١

∴ ٣ − ك = −٢ − ٣ك ∴ ٢ك = −٥

∴ ك = −٥/٢ بالتعويض في (١)

∴ ٢س + ٣ص − ٢ − ٥/٢ (٣س − ص − ١٤) = ٠

∴ ٤س + ٦ص − ٤ − ١٥س + ٥ص + ٧٠ = ٠

∴ −١١س + ١١ص + ٦٦ = ٠

(بالقسمة على ١١)

∴ ص − س + ٦ = ٠

المرشد

فى الرياضيات

نماذج امتحانات الجبر وحساب المثلثات

للصف الأول الثانوى
الفصل الدراسى الثانى

إعداد
سعيد جودة

امتحانات الصف الأول الثانوى الأزهرى
الفصل الدراسى الثانى، فى الجبر وحساب المثلثات

(١) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القاهرة الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ (أ) أكمل ما يأتى :

(١) مجموعه حل المعادلة : جا θ + $\sqrt{٣}$ جتا θ = صفر
حيث ١٨٠° < θ < ٣٦٠° هى .....

(٢) إذا كانت $\begin{pmatrix} ١+ت & ١-ت \\ جا\,هـ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{pmatrix}$

حيث $ت^٢ = -١$ ، هـ زاوية حادة وكان أ ب جـ ء = ١ ق(هـ) = ...°

(٣) إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix}$ فإن $س^{-١}$ = ...

(٤) قطاع دائرى طول قطر دائرته ١٢ سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° تكون مساحته ≃ ..... سم^٢

(٥) إذا كان $\begin{vmatrix} ١ & \frac{١}{أ} + أ \\ \frac{١}{أ} + أ & ١ \end{vmatrix}$ = ١٥ فإن $أ^٢ + \frac{١}{أ^٢}$ = ...

(ب) حل نظام المتباينات الخطية التالية بيانيًا :

٢ص ≥ ٣س ، −٣س + ٢ص ≤ −٦

(جـ) رصد شخص من قمة جبل ارتفاعه ٢,٥٦ كم نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية انخفاضها ٦٣° . أوجد المسافه بين النقطة والراصد لأقرب متر .

---

٢ (أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) النقطه التى تنتمى إلى مجموعه حل المتباينتين :

٢س + ص < ٤ ، س + ٢ص < ٦ هى .....

(٣ ، −١) أ ، (١ ، ٢) ب ، (−٣ ، ١) جـ ، (٠ ، ٠) د

(٢) $\begin{pmatrix} -٣ & ١٠ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} + ٢\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix} =$.

(▭ ، $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$)

(٣) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان أ + أ$^{-١}$ = أ ، فإن .

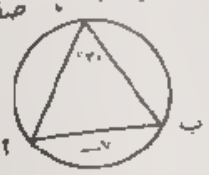
مجموع عناصر المصفوفة أ = ... (٤ ، ٢ ، ١ ، صفر)

(٤) إذا كان ٣ جا θ + ٤ جتا θ = ٥ ، فإن ٣ جتا θ − ٤ جا θ = ...

(٥ ، ٤ ، ٢ ، صفر)

(٥) في الشكل المقابل :

مساحة القطعة الدائرية الصغرى التي وترها أب = ... سم^{٢}



(٢,٢ ، ٤,٤ ، ٨,٨ ، ٤٤)

(ب) إذا كان $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & \text{س} \\ \text{ص} & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٧ \\ ١٨ & ١١ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمة س ، ص

(حـ) أثبت أن : $\frac{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta}{\text{ظا}\theta} + \frac{\text{ظا}\theta}{\text{جا}\theta\,\text{قا}\theta} = ١$

(٢) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القليوبية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ أكمل ما يأتي :

(١) أوجد مساحة المثلث فيه إحداثيات رؤوسه هي :
(−١ ، −٣) ، (٤ ، ٢) ، (−٣ ، ٥) مستخدمًا المحددات .

(٢) قطاع دائري طول نصف قطر قاعدته ٧ سم ، زاويته المركزية ٢,١ ء أوجد مساحته

(٣) إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = أ س^{٢} + ب يمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (−١ ، ٣) أوجد باستخدام المصفوفات قيمتي أ ، ب .

(٤) من قمة برج ارتفاعه ٦٠م وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع في المستوى الأفقي المار بقاعدة البرج هي ٢٨° ٣٦′ ، أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر .

(٥) إذا كان $\begin{vmatrix} ٢ & \text{٢س} \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ١٠$ فأوجد قيمة س .

٥ أجب على الأسئلة الآتية :

(١) قطعة دائرية طول نصف قطرها ١٠ سم وطول قوسها ٥ سم . أوجد مساحتها .

(٢) بطريقة (كرامر) أوجد مجموعة الحل لنظام المعادلات الخطية الآتية :
٢س − ٣ص = ٣ ، س + ٢ص = ٥

(٣) مثل أنظمة المتباينات الآتية : حيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٣س + ص ≤ ١٥
٤س + ٣ص ≤ ٢٤ ثم أوجد النقطة التي تحقق دالة الهدف
ر = ٣ص + ٢س أقل ما يمكن .

(٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & -١ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س حيث : ٢س^{ت} − أ ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٣ \\ -٢ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$

(٥) أوجد مجموعة الحل للمعادلة : ٤ جا^{٢} θ − ٣ جا θ جتا θ = صفر
حيث θ ∈ [٠ ، ٢π[

(٢) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة المنوفية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذ كان $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ \text{س} & -٢ \end{pmatrix} = I$ فإن س = ...

(٥ أ ، ٤ أ ، ٣ أ ، ٢)

(٢) المقدار جا^{٢} θ + ظا^{٢} θ جا^{٢} θ في أبسط صورة يساوي .....

(جا^{٢} θ أ ، ظا^{٢} θ أ ، −١ أ ، ١)

(٣) النقطة التي تنتمي لمجموعة حل المتباينات : س ≥ ٣ ، ص < ٣
س + ص > ٤ هي .....

((٤ ، ٣) أ ، (٣ ، ١) أ ، (٣ ، ٢) أ ، (٣ ، ٣))

[illegible]

(٢٠ ، ٣٥ ، ٥٠ ، ٦٥)

[illegible]

(٢) أ ب

[illegible]

س = ٣ ، ص = س + ٢ ، س + ٢ص = −٢

٥ أكمل ما يأتي

[illegible] معرفة ، فإن (أ ب)^ن = ...

[illegible] قطر دائرتها [illegible] وقياس زاويتها المركزية ١١٠° =

[illegible] رؤوسه (−١ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، [illegible] وحدة مربعة

(٤) إذا كان جتا (٩٠° − θ) = ١ ، فإن الحل العام للمعادلة هي .....

[illegible] المعكوس الضربي للمصفوفة

س − ٣ص = ٥ ، ٢س + ٥ص = ٨

[illegible] ارتفاعه ٥٠ متر قيست زاوية انخفاض سيارة على الأرض فوجد [illegible] ١٥ ، ٢٧ حيث السيارة فوق قاعدة البرج في مستوى أفقي واحد . [illegible] البرج لأقرب متر

(ثانيًا) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الشرقية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين .

(١) [illegible] + معكوس ضربي عندما أ = ...

(٢) [illegible] ، ∈ ح − {−٦ ، ٦}) ، ∈ ح − {−٦ ، ٦})

(٧ ، ٣ ، ٥ ، ١٠)

(٣) إذا كان $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٢س & ٣ \\ ٤ & ١ & ٦ \end{vmatrix}$ = −١١ ، فإن س = ...

(٣ ، ٢ ، ٤ ، ٥)

(٤) قطاع دائري محيطه ١٠ سم وطوله قوسه ٢ سم ، فإن مساحته = ... سم² (٣ ، ٤ ، ٨ ، ٦)

(ب) باستخدام المحددات أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه :

(٢ ، ٤) ، (٥ ، ٢) ، (−٣ ، −٢)

(جـ) أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ٨ سم وقياس زاويتها المركزية ١٢٠° .

٢ (أ) أكمل ما يأتي :

(١) أبسط صورة للمقدار : (جا² θ + جتا² θ)² + ظا² θ هي .....

(٢) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٢س - ١ \\ ٧ & ٢ \end{pmatrix}$ متماثلة فإن س = ...

(٣) إذا كانت : ١٨٠° < θ < ٣٦٠° ، وكانت : ٢ جتا θ + ١ = ٠ ، فإن θ = ...

(٤) إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٢ × ٣ ، ب^ت مصفوفة على النظم ١ × ٣ فإن المصفوفة أ ب على النظم .....

(ب) أوجد القيمة الصغرى لدالة الهدف ر = ٣س + ٢ص تحت القيود :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٤ ، ٣س + ص ≤ ٦

(جـ) من نقطة على سطح الأرض قيست زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٢٥° وكان بعد الراصد عن قاعدة البرج يساوي ٦٠ م أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر .

[illegible]

[illegible]

(٢) اكمل ما يلي:

(١) مساحة القطاع الدائرى الذى محيطه ١٢ سم ، طول قوسه ٦ سم تساوى .....

(٢) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} -١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٣ & -٤ \\ ٠ & ٠ & -٢ \end{vmatrix}$ = ...

(٣) إذا كان $\begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ١ & ١٢ - ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٣ & ٧ \end{pmatrix}$

فإن أ = ...

ب = ...

(٤) هو الشكل المقابل

[illegible]

(٦) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الأقصر الأزهرية) ٢٠٠٩/٢٠٠٨م

(أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين

(١) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ج} & \text{ل} \end{vmatrix}$ = ٣ ، فإن $\begin{vmatrix} ٣\text{س} & ٥\text{ص} \\ ٢\text{ج} & ٥\text{ل} \end{vmatrix}$ =

(٦ أ ، ٢٥ أ ، ٣٠ أ ، ١٥)

(٢) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة المتباينات س ≥ ٢ ، ص ≥ ١ هى

[(١ ، ٢) أ ، (٢ ، ١) أ ، (٣ ، ١) أ ، (٢ ، ٣)]

(٣) إذا كان ق(أ) = ١٥ ، فإن ق(٣أ) =

(١٦ أ ، ٢٢٤ أ ، ١٤ أ ، ٢٢٦)

(٤) القطاع الدائرى الذى طوله قوسه ١٦ سم ، وطول قطر دائرته ١٨ سم مساحته ..... سم² .

(٢٧ أ ، ٧٢ أ ، ١٨ أ ، ١٤٤)

(ب) إذا كان ب² + ج² = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، أ = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التى تحقق أن : س = (أب + أج)²

(جـ) أوجد ..... القطعة الدائرية الأقل طولا ، وفيها = طول نصف قطر دائرتها = ١٢ سم

① أكمل ما يأتى :

[illegible]

- [illegible] ٧ سم [illegible] سم^2

[illegible]

- [illegible] س = [illegible] ، ص = [illegible]

[illegible] ٧ متر [illegible] ٤,٨ متر [illegible] =

[illegible]

[illegible] س ≥ صفر ، ص ≥ صفر ، س − ص ≥ ٣ ، ٢س + ص ≥ ١٠

[illegible] ر = ٤س + ص

أجب عن السؤال الآتى :

① اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(أ) النقطة التي عندها للدالة م = ٣٥ س + ١٠ ص قيمة عظمى هي .... [(٠ ، ٠) أ، (٠ ، ١٠) أ، (٠ ، ٤٠) أ، (٢٠ ، ١٠)]

(ب) قيمة أ التي تجعل للمصفوفة $\begin{pmatrix} ٤ & أ \\ ١ & ٩ \end{pmatrix}$ معكوسًا ضربيًا هي ح − {......} (±٦ أ، ±٣ أ، ±$\sqrt{١٢}$ أ، ±$\sqrt{٥}$)

(جـ) المقدار حا (٩٠° − θ) قتا (٩٠° − θ) في أبسط صورة يساوي .... (١ أ، حا^{2}θ أ، حتا^{2}θ أ، حاθ حتاθ)

(د) محيط القطاع الدائري الذي طول قوسه ٤ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم = ... سم (١٤ أ، ٢٠ أ، ٣٠ أ، ٢٤)

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

② (أ) إذا كان $\begin{pmatrix} -٥ & س+٨ \\ -ص & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥ & ٣٨ \\ ٤ص-١٠ & ٣ \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة س ، ص ثم أوجد $\begin{pmatrix} ص & س \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$

(ب) أثبت صحة المطابقة : طاθ + طتاθ = قاθ قتاθ

③ (أ) حل نظام المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة كرامر :

س + ٢ص = ٥ ، ٣س + ص = ٥

(ب) أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ٥ سم وقياس زاويتها ١٥٠° لأقرب سم^2 .

④ (أ) حل النظام الآتي بيانيًا: ٣س + ٥ص ≤ ١٥ ، ص < س − ١

(ب) يقف شخص على بعد ٥٠ متر من قاعدة برج ، ورصد زاوية ارتفاع قمة البرج ، فوجد أن قياسها ٢٥° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر

(٨) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القليوبية الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

• أجب عن السؤال الآتي (إجباري):

أكمل ما يأتي

(أ) المصفوفة أ تكون متماثلة إذا كان ..... ويكون لها معكوس ضربي إذا كان

(ب) مضلع نمائي منتظم طول ضلعه ٦ سم فإن مساحته = ... سم²

(جـ) قطاع دائري محيطه ١٢ سم ، طول قوسه ٣ سم فإن مساحته = ... سم²

(د) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢س & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ١٠$ فإن س = ...

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي :

(أ) إذا كان : $أ^{-١} = \begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $أ^{٢} - ١٥أ + ٢٢I = \square$

(ب) قطعة دائرية قياس زاويتها المركزية ٩٠° ومساحتها ٥٦ سم² أوجد طول نصف قطرها.

(أ) عين مجموعة حل المتباينات بيانيًا :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٣ص ≥ ٧ ، ٣س + ٤ص ≥ ١٤

ثم أوجد قيمة : س ، ص التي تجعل ر = ٢٠س + ٥٠ ص أكبر ما يمكن.

(ب) أثبت أن : $\frac{١ + ظا^{٢}\theta}{ظا^{٢}\theta} = ١ - جا^{٢}\theta$

(أ) أوجد مساحة المثلث أ ب جـ حيث :

أ(٣ ، ٣) ، ب(-٤ ، ٢) ، جـ(١ ، -٤)

باستخدام المحددات.

(ب) حل المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات :

٢ص = ٥ - ٣س ، ٢س = ٣ - ص

(٩) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة المنوفية الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

• أجب عن السؤال الآتي (إجباري):

أكمل ما يأتي

(أ) $(جا\theta + جتا\theta)^{٢} - ٢جا\theta جتا\theta$ = ...

(ب) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن $ب^{-١}أ$ = ...

(جـ) مساحة Δ س ص ع حيث س (٣ ، ٢) ، ص (-٤ ، ٢) ، ع (١ ، -٤) تساوي ..... وحدة مربعة

(د) إذا كانت س مصفوفة بحيث س × $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$

فإن مصفوفة س = ...

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي :

(أ) حل نظام المعادلات الخطية الآتية بطريقة كرامر :

س + ص = ٥ - ٣ع ، ص = ع ، ٢س - ٤ع = -٢

(ب) طائرة ورقية طول خيطها ٤٢ متر ، إذا كانت الزاوية التي يصنعها الخيط مع الأرض الأفقية تساوي ٦٣° ، أوجد لأقرب متر ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض.

(أ) أوجد القيمة الصغرى لدالة الهدف : ر = ٤س + ص تحت القيود :

س + ص ≥ ٦ ، ٢س + ص ≥ ١٠ ، س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

(ب) أوجد الحل العام للمعادلة $جتا(\frac{\pi}{٢} - \theta) = \frac{١}{٢}$

(أ) إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} صفر & -٢س & ٥ \\ ع+٦ & صفر & ٣ع \\ ٢ص+س & ٦ & صفر \end{pmatrix}$ شبه متماثلة

أوجد س ، ص ، ع

(ب) قطعة دائريه قياس زاويتها المركزية ٩٠° ومساحة سطحها ٥٦ سم² ، أوجد طول نصف قطرها ومساحة القطع لهذه القطعة ؟

(١١) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الشرقية الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(ب) إذا كان المصفوفة على النظم ٢ × ٢ ، ب مصفوفة على النظم ١ × ٣
فإن مصفوفة أ ب تكون على النظم . . .
(٢ × ٢ ، ٣ × ١ ، ٢ × ٣ ، ١ × ٢)

(جـ) إذا كان ٠ ≤ θ ≤ ١٨٠° وكان √٣ ظا θ − ١ = صفر فإن θ تساوى
(٣٠° ، ٦٠° ، ١٢٠° ، ١٥٠°)

(د) النقطة التي تنتمي إلى مجموعة حل المتباينات الآتية
س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢س + ص < ٤ ، س + ٣ص < ٦ هي . . . .
[(١ ، −٣) ، (٢ ، ٠) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ١)]

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي

❶ (أ) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، فأثبت أن: أ² − ٥أ + ١٢أ − □

(ب) أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف ر = ٢س + ص تحت القيود
س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢س + ٣ص ≤ ١٨ ، −٤س + ص ≤ −٨

❷ (أ) أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه (−٤ ، ٢) ، (٣ ، ١) ، (−٢ ، ٥)
باستخدام المحددات.

(ب) في دائرة طولها ٨ سم وعلى بعد ٣ سم من مركزها. أوجد مساحة
القطعة الدائرية الصغرى الحادثة من تقاطع هذا الوتر مع سطح الدائرة.

❸ (أ) حل نظام المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات:
س + ٣ص − ٥ = صفر ، ٢س = ٨ − ٥ص

(ب) رصد قارب من قمة فنار ارتفاعه ٥٠م فوجد أن زاوية انخفاضه ٣٥°
أوجد بعد القارب عن قمة الفنار لأقرب متر.

أجب عن السؤال الآتي (إجباري):

❶ اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين:

(أ) إذا كان أ + أ^ت = □ فإن أ هي . . . . .
(مصفوفة صف أ ، مصفوفة عمود أ ، مصفوفة مماثلة أ ، مصفوفة شبه متماثلة)

(ب) ظا θ قتا θ = ... (١ أ ، حتا θ أ ، قا θ أ ، جا θ)

(جـ) النقطة التي تحقق منطقة حل المتباينات: س > ٢ ، ص > ١ ، س + ص > ٣
هي . . . . . [(٣ ، ١) أ ، (١ ، ٢) أ ، (٣ ، ٢) أ ، (١ ، ٣)]

(د) قطاع دائري طول قطر دائرته ٨ سم وطول قوسه ٦ سم فإن مساحته . . . . . .
(١٢ سم² أ ، ٤٨ سم² أ ، ٢٤ سم² أ ، ٧ سم²)

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي:

❷ (أ) إذا كانت أ = (٢ −١ ٣) ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ \\ ١ \\ ٤ \end{pmatrix}$ أوجد أ ب إن أمكن

(ب) من نقطة على سطح الأرض وعلى بعد ٥٠م من قاعدة برج وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة برج ٣٨° ٢٦َ أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

❸ (أ) باستخدام المحددات أوجد مساحة Δ أ ب جـ حيث:
أ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، −٤) ، جـ (−٢ ، ٣)

(ب) أوجد بيانيًا مجموعة حل المتباينات ٢س + ص ≥ ٤ في ح × ح

❹ (أ) مثلث أطوال أضلاعه ٦ سم ، ١٠ سم ، ٨ سم أوجد مساحته.

(ب) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ أثبت أن: أ² − ٢أ − ٣أ = □

[illegible]

[illegible]

[illegible]

المرشد

فى الرياضيات

نماذج امتحانات الهندسة التحليلية

للصف الأول الثانوى
الفصل الدراسى الثانى

إعداد

سعيد جودة

الفصل الدراسى الثانى فى الهندسة التحليلية

(١) امتحان (الإدارة التعليمية لمنطقة القاهرة الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) أكمل ما يأتى :

(١) المنحنى : $\overleftarrow{أ} - ٢\overleftarrow{س} + ٣\sqrt{٢}\,\overleftarrow{ص}$ على الصورة القطبية هو .....

(٢) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ١) إلى المستقيم : ٤س − ٣ص + جـ = صفر يساوى ٣ وحدة طول فإن جـ = ... أو .....

(٣) إذا كان أ = (−٤ ، ٤) ، ب = (٥ ، −٣) ، جـ ∈ $\overline{أب}$ بحيث أجـ : جـب = ٣ : ١ ، فإن جـ = (..... ، .....)

(٤) مساحة سطح المثلث المحدد بمحور السينات ومحور الصادات والمستقيم ٣س − ٤ص = ١٢ تساوى ..... وحدة مساحة .

(٥) أ ب جـ ء متوازى الأضلاع حيث : أ = (٢ ، −١) ، ب = (٧ ، ١) ، جـ = (٤ ، ٤) فإن إحداثى نقطة ء = ...

(ب) أثبت أن المستقيمين س − ٤ص + ١٤ = صفر ، ٤س + ص + ٥ = صفر متعامدان ثم أوجد نقطة تقاطعهما ومعادلة المستقيم المار بنقطة التقاطع والنقطة (٣ ، ٢)

(جـ) فى أى شكل رباعى أ ب جـ ء أثبت أن . $\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{ءجـ} = \overleftarrow{أجـ} + \overleftarrow{ءب}$

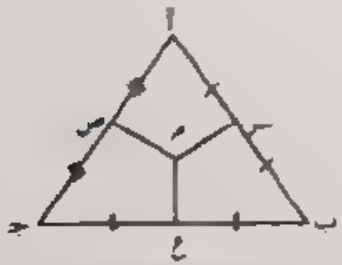
(٢) (أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ = (٦ ، $\frac{\pi ٢}{٣}$) ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = (٦ ، $\frac{\pi ٤}{٣}$) ، $\overleftarrow{ق_٣} = ٩\overleftarrow{س} + ٤\overleftarrow{ص}$

فإن مقدار محصلة هذه القوى = ...

(١٣ أ ، ١٠ أ ، ٥ أ ، ٦$\sqrt{٣}$ أ)

(٢) فى الشكل المقابل :



إذا كانت م نقطة متوسطات Δ أ ب جـ

فإن : $\overleftarrow{مس} + \overleftarrow{مص} + \overleftarrow{مع}$ = ...

(٣ $\overleftarrow{عب}$ أ ، ٢ $\overleftarrow{صجـ}$ أ ، $\overleftarrow{ب}$ أ ، ٥ $\overleftarrow{اس}$)

(د) إذا كان أ = (٢ ، ٣) ، ب = (١ ، −١) أوجد إحداثي النقطة جـ التي تقسم $\overleftarrow{أب}$ من الخارج بنسبة ٤ : ٣

(أ) أولا : إذا كانت $\overleftarrow{أ}$ = (٧ ، ٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٣ ، ك) ، $|\overleftarrow{أب}|$ = ٥ فأوجد قيمة ك .

ثانيا : وجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) ويوازي محور الصادات .

(ب) أولا : إذا كان $\overleftarrow{و}$ = (٨ ، $\overline{٣}$/٨) وجد الصورة القطبية للمتجه $\overleftarrow{و}$

ثانيا : أوجد طولي الجزئين المقطوعين من المحورين بالمستقيم .

٣س + ٤ص − ١٢ = صفر

(جـ) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين س + ص = ٥ ، ٢س + ص − ٨ = ٠ ويمر بالنقطة (٢ ، ١) .

(د) أوجد مساحة الشكل الخماسي المنتظم الذي طول ضلعه ١٦ سم مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين .

(هـ) أ ب جـ مثلث أخذت النقطة د ∈ $\overleftarrow{بجـ}$ بحيث ٢ $\overleftarrow{بد}$ = ٣ $\overleftarrow{دجـ}$

أثبت أن : ٢ $\overleftarrow{أب}$ + ٣ $\overleftarrow{أجـ}$ = ٥ $\overleftarrow{أد}$

(٢) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة المنوفية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كان : $\overleftarrow{م}$ = (٣ ، ٢) ، $\overleftarrow{هـ}$ = (٢ ، ك) وكان $\overleftarrow{م}$ ⊥ $\overleftarrow{هـ}$ فإن ك = ...

($\frac{٣}{٤}$ أ ، $\frac{٤}{٣}$ أ ، ٣ أ ، −٣)

(٢) المتجه $\overleftarrow{أ}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\sqrt{٣}$ $\overleftarrow{ص}$ على الصورة القطبية هو .....

[(٤ ، $\frac{٣}{٥}\pi$) أ ، (٤ ، $\frac{٥}{٣}\pi$) أ ، (٤ ، ٢٤٠°) أ ، (−٤ ، ١٢٠°)]

(٣) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : ٣س − ص + ٦ = ٠ ، ٢س + ص = ٥ تساوي ..... (١٥° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°)

(٤) في Δ أ ب جـ يكون $\overleftarrow{أب}$ + $\overleftarrow{بجـ}$ + $\overleftarrow{أجـ}$ = ...

($\overleftarrow{٢أجـ}$ ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{بجـ}$)

(١) إذا كان أ = (٥ ، ٢) ، ب = (٢ ، ١٠) فإن محور التقسيم ب بنسبة

(٢ : ١ من الداخل أ ، ٥ : ٢ من الخارج)

أ ، ٢ : ١ من الخارج أ ، ٥ : ٢ من الداخل)

(٤) قياس الزاوية المتوجهة من المستقيم ص = (٢ ، $\overline{٣}$)(س + ٥) ، ص = (٢ + $\sqrt{٣}$)(س − ٧) هو

(١٥٠ أ ، ١٣٥ أ ، ١٢٠ أ ، ١١٠)

(٥) إذا كان ل١ = س − ٣ص + ٧ = صفر ، ل٢ = $\frac{س}{٣}$ − $\frac{ص}{٣}$ = ٣

فإن أ = ... حيث ل١ // ل٢

ب) وجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٥) ويوازي المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك(٢ ، −٣)

(جـ) دائرة مركزها نقطة الأصل أثبت أن الوترين المرسومين في الدائرة واللذان معادلتاهما : ٣س + ٤ص + ١٠ = صفر ، ٥س − ١٢ص + ٢٦ = صفر متساويان في الطول

(٣) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القليوبية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

أجب عن الأسئلة الآتية

(أ) أولا : أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، −١) ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه لمحور السينات .

ثانيا : أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٢) على المستقيم ٥س − ١٢ص − ٧ = صفر

(ب) أولا : إذا كانت جـ(٢ ، ٦) هي منتصف $\overleftarrow{أب}$ حيث ب(٣ ، ٧) فأوجد جـ ، أ

ثانيا : إذا كانت : $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، ك) ، $\overleftarrow{ب}$ = (−٤ ، ٢) وكان $\overleftarrow{أ}$ ⊥ $\overleftarrow{ب}$ فأوجد قيمة ك

(جـ) أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : ٢س − ٣ص = −٤

$\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك(٢ ، ٤)

(د) أثبت أن المستقيمين .

$\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٤) + ك(١ ، −٢) ، ٢س + ص + ٢ = صفر متوازيان .

(ب) أ، ب ان المستقيمين ل١ : ٢س + ص − ٤ = ٠ ،

ل٢ : ٢س + ص + ٣ = ٠ متوازيان وأوجد البعد بينهما .

(جـ) أوجد الصورة المتجانسة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −١) ووحدة الاتجاه له (−٣ ، ٥)

---

(١) أكمل ما يأتي :

(١) إذا كان أ = ٢س + ٣ص ، ب = ٣س − ٢ص

فإن ٢ أ − ب = ...

(٢) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وبنقطة تقاطع المستقيمين :

س = ٢ ، ص = ٥ هي .....

(٣) إذا كان أ = (٤ ، ٢) ، ب = (١ ، −٢) ،

فإن ||٣ أ + ٢ ب|| − ... .

(٤) إذا كان أ ب جـ مثلث فيه د منتصف ب جـ ،

فإن أب + أجـ = ...

(ب) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين :

ل١ : س + ٥ص = ٣ ، ل٢ : ر = (٢ ، ٣) + ك(٤ ، ١)

(جـ) إذا كانت النقطة أ = (٢ ، ٥) ، ب = (٧ ، −١)

أوجد إحداثي النقطة جـ التي تقسم أب من الخارج بنسبة ٣ : ٢

(٥) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة البحيرة الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كان أ = (−٢ ، ١) ، جـ = (−٣ ، ك) متوازيين فإن ك = ...

(٢/٣ أ ، ٣/٢ أ ، ٦ أ ، −٦)

(٢) إذا كان أ (−٣ ، ٤) ، ب (٦ ، −٨) فإن محور السينات يقسم أب بنسبة .....

(١ : ٢ أ ، ٢ : ١ أ ، ٤ : ٣ أ ، ٢ : ٣)

(٣) إذا كان ك|٤ أ| = ||−٣ أ|| ، فإن ك = ...

(٤/٣ أ ، −٣/٤ أ ، ٣/٤ أ ، −٤/٣)

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(أ) البعد بين المستقيمين ص − ٣ = صفر ، ص + ٢ = صفر يساوى . .

(١ أ، ٢ أ، ٣ أ، ٥)

(ب) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ حيث $\overrightarrow{أ}$ = (−٤ ، −٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٨ ، ك) فإن قيمة ك = ...

(٦ أ، −٦ أ، ٨ أ، −٨)

(جـ) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٥) يوازى محور السينات هى .....

(س = ٣ أ، ص = ٥ أ، ص = ٣ أ، ص = ٥)

(د) أ ب جـ مثلث فيه أ(صفر ، ٨) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (−٣ ، ٥) فإن إحداثى نقطة تلاقى المتوسطات هى .....

((صفر ، $\frac{٥}{٢}$) أ، (٥ ، صفر) أ، (صفر ، ٥) أ، ($\frac{٥}{٢}$ ، صفر))

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

١ (أ) إذا كانت : أ(٣ ، ١) ، ب (−٢ ، ٥) ،

أوجد إحداثيات النقطة جـ التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣

(ب) أوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم الذى ميله $\frac{١}{٣}$ ويمر بنقطة (٢ ، −١)

---

٢ (أ) أ ب جـ د موازى أضلاع حيث أ(٢ ، −١) ، ب (٧ ، ١) ، جـ (٤ ، ٤)

أوجد إحداثى نقطة د .

(ب) أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين.

٣س − ٤ص − ١١ = صفر ، س + ٧ص + ٥ = صفر

---

٤ (أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة جـ(٢ ، −١) ويمر بنقطة تقاطع المستقيمين ٧س + ص + ٣ = صفر ، ٥س − ص − ٣ = صفر.

(ب) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٥ ، ٢) إلى الخط المستقيم المار بالنقطتين (صفر ، −٣) ، (٤ ، صفر).

---

٥ عين ... [illegible]

... أوجد إحداثيات النقطة جـ التى تقسم ... من الداخل بنسبة ٢ : ٣ .

... أوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم الذى ميله ... ويمر بنقطة (٢ ، −١)

---

٦ (أ) أ ب جـ د موازى أضلاع حيث أ(٢ ، −١) ، ب (٧ ، ١) ، جـ (٤ ، ٤)

أوجد إحداثى نقطة د .

(ب) أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين.

٣س − ٤ص − ١١ = صفر ، س + ٧ص + ٥ = صفر

---

٧ (أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة جـ(٢ ، −١) ويمر بنقطة تقاطع المستقيمين ٧س + ص + ٣ = صفر ، ٥س − ص − ٣ = صفر.

(ب) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٥ ، ٢) إلى الخط المستقيم المار بالنقطتين (صفر ، −٣) ، (٤ ، صفر).

---

٨ عين ... [illegible] أ(٣ ، −٥) ويوازى ...

المرشد

مراجعة نهائية

امتحان الإدارة المركزية لمنطقة القليوبية الأزهرية [illegible]/٢٠١٨م

أجب عن الأسئلة الآتية

① أكمل ما يأتي

[illegible] ٣س − ٢ص + ٧ [illegible] = ٥ ، [illegible]

[illegible]

[illegible] (٢ ، ١) ك + (٥ ، ٠) = [illegible]

[illegible]

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي

② [illegible] (١ ، ٢) على [illegible] معادلته :
٥س − ١٢ص − ٧ = صفر

[illegible] (−٣ ، ٤) أوجد إحداثى النقطة جـ [illegible]

③ [illegible] بالنقطة (٣ ، −٤) [illegible] لمحور السينات.

[illegible] جـ = (٢ ، −٢) هى رؤوس [illegible]

④ [illegible] (−٢ ، ٤) ونقطة تقاطع المستقيمين :

[illegible]

[illegible] جـ (٦ ، ٣)

[illegible] (أ) بالدرجات.

أجب عن الأسئلة الآتية :

① أكمل ما يأتي :

(أ) إذا كان المستقيمان : ٣س − ٢ص + ٧ = صفر ،
أس + ٣ص + ٥ = صفر ، متعامدان فإن أ = ...

(ب) المستقيم $\frac{س}{٤} - \frac{ص}{٣} = ١$ يقطع محور الإحداثيات فى أ ، ب فإن مساحة Δ و أ ب = ... وحدة مربعة

(جـ) المتجه $\overrightarrow{م} = (١٢\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤})$ يعبر عنه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين بالصورة $\overrightarrow{م}$ = ...

(د) إذا كان $\overrightarrow{ع}$ [illegible] − ١٢ $\overrightarrow{ى}$ ، [illegible] = −٨ $\overrightarrow{ى}$ فإن [illegible] = ... $\overrightarrow{ى}$.

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي :

② (أ) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : $\overrightarrow{بجـ} = ٣\overrightarrow{أء}$
برهن أن أ ب جـ ء شبه منحرف ، $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بء} = ٤\overrightarrow{أء}$

(ب) إذا كان أ (−١ ، ٤) ، ب (١ ، ٢) ، جـ (٥ ، −٢) أوجد النسبة التى تقسم بها النقطة ب القطعة $\overline{أجـ}$ مبينًا نوع التقسيم.

③ (أ) أوجد طول العمود المرسوم من النقطه (٨ ، −٢) على المستقيم :
$\overrightarrow{ر} = (٠ ، \frac{١}{٣}) + ك (−٣ ، ٤)$

(ب) أوجد الصور المختلفه لمعادله المستقيم المار بالنقطة (٧ ، ٤) وموازيًا للمستقيم الذى معادلته ٣س = ٢ص

④ (أ) أوجد ظاس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم س − ٢ص + ٣ = ٠ والمستقيم المار بالنقطتين (٤ ، −١) ، (٢ ، ١)

(ب) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٤ ، −٦)$ ، $\overrightarrow{ب} = (−٦ ، ٩)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (−٣ ، −٢)$
فأوجد $\|\frac{١}{٢}\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - ٣\overrightarrow{جـ}\|$

(٩) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الغربية الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

أجب عن الأسئلة الآتية

١ أكمل ما يأتي

[illegible]

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي

٢ [illegible]

٣ [illegible]

٤ [illegible]

(١٠) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة البحيرة الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

أجب عن الأسئلة الآتية

١ أكمل ما يأتي

[illegible]

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي

٢ [illegible]

٣ [illegible]

٤ [illegible]

(١١) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة أسيوط الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتي :

(أ) [illegible] = (٦ ، $\frac{\pi}{٣}$) هي ... ..

(ب) إذا كان [illegible] = ‖ك أ‖ فإن ك = ...

(جـ) إذا كان أ (−٣ ، ٤) ، ب (٦ ، −٨) فإن محور السينات يقسم $\overline{أب}$ [illegible] ... .. بنسبة ..

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي :

٢ (أ) أثبت أن المستقيمين $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٤) + ك(١ ، −٢) ، ٢س + ص + ٢ = ٠ متوازيان ، ثم أوجد أقصر بعد بينهما.

(ب) أب جـ ء شكل رباعي فيه $\overrightarrow{بجـ}$ = ٣ $\overrightarrow{ء}$ أثبت أن :

(١) أب جـ ء شبه منحرف. (٢) $\overrightarrow{أجـ}$ + $\overrightarrow{بء}$ = ٤ $\overrightarrow{ء}$

٣ (أ) إذا كان قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين س − ك ص − ٨ = ٠ ، ٢س − ص − ٥ = ٠ يساوى $\frac{\pi}{٤}$ فأوجد قيمة ك.

(ب) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، −٤) ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٤ (أ) دائرة مركزها نقطة الأصل . أثبت أن الوترين المرسومين فى دائرة واللذان معادلتهما :

٣س + ٤ص + ١٠ = ٠ ، ٥س − ١٢ص + ٢٦ = ٠

متساويان فى الطول.

(ب) أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢س − ص = ٥ ، س + ٥ص = ١٦

وعمودى على المستقيم س − ص = ٨

[illegible]

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي :

❶ [illegible] (٢ ، -٥) و نقطة ج (٣ ، ١)

[illegible] أوجد [illegible] $\overrightarrow{أب}$

❷ [illegible] ٥ ، ٣ [illegible]

[illegible] (٤ ، ٣) [illegible]

❸ [illegible] ٣ ، ٥ [illegible]

[illegible] (٤ ، -٣)

[illegible] أوجد [illegible] $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، ٣)

❹ [illegible]

س - ص - ١ = ٠ [illegible] ٢س + ص = ٨

[illegible] أوجد ج

(١٢) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القاهرة الأزهرية) ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

• أجب عن السؤال الآتي (جبريًا)

❶ كمل ما يأتي

[illegible] س - ٣ = ٠ ، ص - ٢ = ٠ يساوي .....

[illegible] س - ٣ص - ٧ = ٠ ، ٢س + ٣ص - ٥ = ٠

[illegible] س = ٣ ص = ٣ [illegible]

[illegible] ٣ ، ٥ [illegible] أب حيث أ = (-٣ ، ١٧)

[illegible]

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي :

❶ (أ) إذا كانت نقطة جـ(٢ ، ٥) تقسم $\overrightarrow{أب}$ من الداخل بنسبة ٤ : ١ وكانت أ(٨ ، ٣) ، فأوجد إحداثي نقطة ب

(ب) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم س + ص = ٠

❷ (أ) أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$ل_1$: ٣س + ٤ص - ١١ = ٠ ، $ل_2$: س + ٧ص + ٥ = ٠

(ب) إذا كان المستقيم يمر بالنقطة ق(-٣ ، ٥) والمتجه (-١ ، ٢) عمودي عليه فأوجد :

(١) المعادلة المتجهة للمستقيم . (٢) المعادلة الكارتيزية للمستقيم .

❸ (أ) أوجد طولي الجزئين المقطوعين من المحورين بالمستقيم :

٣س + ٤ص - ١٢ = ٠

(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ(-٢ ، ٤) ونقطة تقاطع المستقيمين :

س + ٢ص - ٥ = ٠ ، ٢س - ٣ص + ٤ = ٠

(١٣) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الغربية الأزهرية) ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

• أجب عن الأسئلة الآتية :

❶ أكمل ما يأتي :

(أ) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

س - ٣ص + ٥ = ٠ ، س + ٢ص - ٧ = ٠ يساوي .....

(ب) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، -١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، -٥) فإن $\|\overrightarrow{أب}\|$ = ...

(حـ) إذا كان : $\|٣ك \overrightarrow{أ}\| = \|-١٢ \overrightarrow{أ}\|$ فإن ك = ...

(د) المتجه $\overrightarrow{م}$ = (١٢ ، $\frac{\pi}{٤}$) يعبر عنه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين بالصورة .....

❷ (أ) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، -١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٦ ، ك)

أوجد قيمة ك إذا كان : (١) $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ (٢) $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

[illegible]

[illegible]

(٢) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الشرقية الأزهرية) ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

أجب عن ثلاثة أسئلة فقط على أن يكون السؤال الأول إجباريا

١ أكمل ما يأتي

[illegible]

٢ [illegible]

٣ [illegible]

٤ [illegible]

٥ [illegible]

[illegible]

[illegible] : ٣س − ٤ص − ١٠ = ٠ ، ٥س − ١٢ص + ٢٦ = ٠ ،
[illegible] متساويان في الطول

[illegible] وجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

[illegible] س − ٢ص + ١ = ٠ ، ل٢ : ٢س − ٦ص + ٥ = ٠

(٣) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة البحيرة الأزهرية) ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

أجب عن السؤال الآتي (إجباريا) :

١ أكمل ما يأتي

(أ) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ٤$\overrightarrow{س}$ + ٢$\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ٣)
فإن $\overrightarrow{أ}$ + ٣$\overrightarrow{ب}$ = (.. ، ..)

(ب) قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين ميلاهما $\frac{١}{٢}$ ، −٢ يساوي .....

(ج) المعادلة المتجهة للمستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ، −٣) ومتجه الاتجاه له (٣ ، ٤) هي .....

(د) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم س + ص = ٠ يساوي .....

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي :

٢ (أ) إذا كان : ك ‖٤$\overrightarrow{أ}$‖ = ‖−٣$\overrightarrow{أ}$‖ فأوجد قيمة ك

(ب) إذا كانت : أ = (−١ ، ٤) ، ب = (٥ ، −١)
وجد إحداثي نقطة جـ التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

٣ (أ) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : ٣س − ٥ص − ١ = ٠ ،
كس − ص − ٣ = ٠ يساوي ٤٥° ، أوجد قيمة ك

(ب) أثبت أن المستقيمين : $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٤) + ك(١ ، −٢) ،
٢س + ص + ٢ = ٠ متوازيان ، ثم أوجد أقصر بعد [illegible]

المرشد

فى المراجعة العامة والنهائية
فى الرياضيات

إرشادات امتحانات
الجبر وحساب المثلثات
والهندسة التحليلية

للصف الأول الثانوى
الفصل الدراسى الثانى

إعداد

سعيد جودة

سلسلة

المرشد

شرح — مراجعة نهائية

سلسلة المرشد لجميع صفوف الثانوية الازهرية

المواد العربية	المواد الثقافية	المواد الثقافية	المواد الشرعية
	القسم العلمى	القسم الادبى	
نحو	رياضيات	جغرافيا	توحيد
صرف	فيزياء	تاريخ	حديث
بلاغة	كيمياء	منطق	تفسير
أدب	أحياء	فرنساوى	فقه
عروض	انجليزى	انجليزى	ميراث
لغة	مستوى رفيع	مستوى رفيع	منطق
		علم نفس	
		فلسفة	

حلول امتحانات الشهر وحساب المثلثات

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(١) امتحان منطقة القليوبية ١٤٤١هـ/٢٠١٩م

(١) (أ) [illegible]

= $\frac{١}{٢}$ × ٣٨ = ١٩ وحدة مربعة

(٢) مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ [illegible]

= $\frac{١}{٢}$ × ٢,١ × ٤٩ = ٥١,٤٥ سم^٢

[illegible]

$\boxed{س = ٣}$

(٣) (أ) مساحة القطعة الدائرية [illegible]

= [illegible] ٥٢ ٣٨ ٢٨°

= ١٠,٣ سم^٢

(ب) ٢س − ٣ص = ٣

س + ٢ص = ٥

Δ = [illegible] = ٤ + ٣ = ٧

Δس = [illegible] = ٦ + ١٥ = ٢١

Δص = [illegible] = ١٠ − ٣ = ٧

س = $\frac{Δس}{Δ}$ = $\frac{٢١}{٧}$ = ٣

ص = $\frac{Δص}{Δ}$ = $\frac{٧}{٧}$ = ١

---

(٤) $أ ب = \begin{pmatrix}٣ & ١\\ ٢ & ٥\end{pmatrix}\begin{pmatrix}١ & -١ & ٤\\ ٢ & ١ & ٣\end{pmatrix}$

$أ ب = \begin{pmatrix}٣+٢ & -٣+١ & ١٢+٣\\ ٢+١٠ & -٢+٥ & ٨+١٥\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}٥ & -٢ & ١٥\\ ١٢ & ٣ & ٢٣\end{pmatrix}$

$∵ ٢ س^{مد} = أ ب + \begin{pmatrix}٣ & ٢ & ٣\\ -٢ & ١ & -٣\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}٨ & ٠ & ١٨\\ ١٠ & ٤ & ٢٠\end{pmatrix}$

$س^{مد} = \begin{pmatrix}٤ & ٠ & ٩\\ ٥ & ٢ & ١٠\end{pmatrix}$

$∴ س = \begin{pmatrix}٤ & ٥\\ ٠ & ٢\\ ٩ & ١٠\end{pmatrix}$

(٥) المعادلة: ٤ حا^٢θ − ٣ حا θ حتا θ = صفر

حا θ (٤ حا θ − ٣ حتا θ) = صفر

∴ حا θ = صفر أو ٤ حا θ = ٣ حتا θ

ق(θ̂) = {٠ ، ١٨٠° ، ٣٦٠°}

∴ ظا θ = $\frac{٣}{٤}$ ، ق(θ̂) = ٣٦° ٥٢′ ١٢″

مجموعة الحل

= {٠ ، ١٨٠° ، ٣٦٠° ، ٣٦° ٥٢′ ١٢″}

(٢) امتحان منطقة المنوفية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(١) (أ) $\begin{pmatrix}٣ & ١\\ ٢ & ١\end{pmatrix}\begin{pmatrix}١ & -١\\ -٢ & س\end{pmatrix} = I$

$∴ \begin{pmatrix}٣-٢ & -٣+س\\ ٢-٢ & -٢+س\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١ & ٠\\ ٠ & ١\end{pmatrix}$

$∴ \begin{pmatrix}١ & -٣+س\\ ٠ & -٢+س\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١ & ٠\\ ٠ & ١\end{pmatrix}$

−٣ + س = ٠ ⇐ ∴ $\boxed{س = ٣}$

−٢ + س = ١ ⇐ $\boxed{س = ٣}$

مجموعة الحل = {(٣ ، ١)}

(ب) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

الحل يقع في الربع الأول

٣س + ص = ١٥

(٠ ، ٠) ∉ مجموعة حل المتباينة.

٣س + ص ≥ ١٥

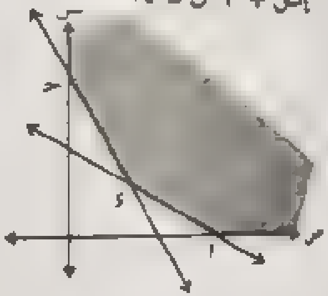
س	٠	٥
ص	١٥	٠

٤س + ٣ص ≥ ٢٤

س	٠	٦
ص	٨	٠

(٠ ، ٠) ∉ مجموعة حل المتباينة

٤س + ٣ص ≥ ٢٤



(ﺟ) النقطة يوجد على الرسم ثلاث نقاط

أ = (٦ ، ٠) ، جـ = (٠ ، ٨)

ء هي نقطة تقاطع المستقيمين

٣س + ص = ١٥ ، ٤س + ٣ص = ٢٤

نقطة التقاطع : ء = ($\frac{٢١}{٥}$ ، $\frac{١٢}{٥}$)

ر(٦ ، ٠) = ٣ × ٠ + ٢ × ٦ = ١٢

ر(٠ ، ٨) = ٣ × ٨ + ٢ × ٠ = ٢٤

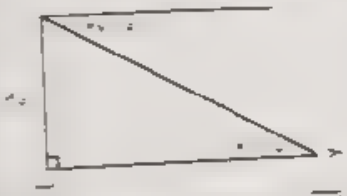
ر($\frac{٢١}{٥}$ ، $\frac{١٢}{٥}$) = ٣ × $\frac{١٢}{٥}$ + ٢ × $\frac{٢١}{٥}$

= $\frac{٧٨}{٥}$ = ١٥ $\frac{٣}{٥}$

أقل ر يمكن عند (٦ ، ٠)

س = -١٠ ، ص = ٢

مجموعة الحل { (-١٠ ، ٢) }



فرض أن $\overline{أب}$ يشغل نصف قطر المخروط ب جـ

ط ١٥ ٢٧ = $\frac{أب}{ب جـ}$ = $\frac{٥٠}{ب جـ}$

ب جـ = $\frac{٥٠}{ط ١٥ ٢٧}$ = ٨٧ ,

(٤) امتحان منطقة الشرقية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(١) محدد المصفوفة = $\begin{vmatrix} ١ & ١٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ = ١² - ٣٦

صفر المحدود = صفر

١² = ٣٦ ، أ = ٦

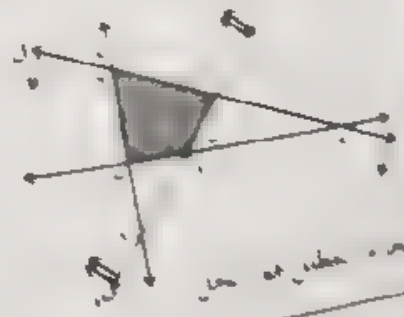
المصفوفة ب معكوس ضربي عند أ = ٦

(٢) ٣ + ص² ظا

= ٢ + (١ + ظا² θ) = ٢ + قا² θ

= ٢ + ٥ = ٧

(٥) امتحان منطقة البحيرة ١٤٤٠هـ/٢٠١٨م



(٢) (أ) (١) المحيط = ٢س + ل = ١٢

∴ ٢س + ٦ = ١٢

∴ ٢س = ٦

∴ $\boxed{\text{س} = ٣}$

∴ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل س

= $\frac{١}{٢} \times ٦ \times ٣ = ٩$ سم^٢

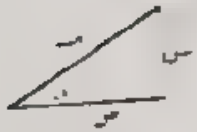
(٢) قيمة المحدد = حاصل ضرب القطر الرئيسي = −١ × ٣ × −٢ = ٦

(٣) ١٢ − أ = ٣ ⇐ ١٢ = ٤

$\boxed{\text{أ} = ٩}$

٣ب + ١ = ٧ ⇐ ٣ب = ٦

$\boxed{\text{ب} = ٢}$



∴ جا ٤٧ = $\frac{\text{س}}{٧}$

∴ س = ٧ جا ٤٧

س = ٥,١ سم

جا ٤٧ = $\frac{\text{س}}{٧}$ ⇐ س = ٧ جا ٤٧

س = ٤,٨ سم

(ب) مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ $\begin{vmatrix} -٢ & -٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ١ \\ -٤ & ٣ & ١ \end{vmatrix}$

= $\frac{١}{٢}$ ((−٢ + ٩ + ٨) − (−٤ − ٦ − ٦))

= $\frac{١}{٢}$ (١٥ − (−١٦))

= $\frac{١}{٢}$ × ٣١ = ١٥,٥ وحدة مربعة

(جـ) ∵ م أ = م ب

∴ المثلث م أ ب المتساوي الأضلاع

∴ م أ = م ب

= ق = ٨ سم

مساحة القطعة الدائرية

= $\frac{١}{٢}$ ق^٢ (θ − جا θ)

ب = (٢ ، ٠) ، جـ = (٠ ، ٠)

أ = (٠ ، ٦) أما "أ" فهي نقطة تقاطع المستقيمين

س + ٣ص = ١٨ ⇐ أ = (٣ ، ٤)

س + ص = −٨

م (٢ ، ٠) = ٢ × ٢ + ٠ = ٤

م (٠ ، ٦) = ٢ × ٠ + ٦ = ٦

م (٠ ، ٠) = صفر

م (٣ ، ٤) = ٢ × ٣ + ٤ = ١٠

∴ قيمة العظمى = ١٠ عند الهدف.

أب = جـ

س − ٤ص = ١

س − ٧ص = −١٢

$\begin{vmatrix} ١ & -٤ \\ ١ & -٧ \end{vmatrix}$

محدد أ = Δ = $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$

= −٢١ − ٢٠ = −٤١ ≠ ٠

∴ معكوس ضربي

أ$^{-١}$ = $\frac{١}{٤١}$ $\begin{vmatrix} -٧ & -٤ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix}$

س − أ$^{-١}$ ج حيث ج = $\begin{vmatrix} ١ \\ -١٢ \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{vmatrix}$ = $\frac{١٢}{٤١}$ $\begin{vmatrix} -٧ & -٤ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} ١ \\ -١٢ \end{vmatrix}$

= $\frac{-١}{٤١}$ $\begin{vmatrix} -٧ + ٤٨ \\ -٥ - ٣٦ \end{vmatrix}$

= $\frac{-١}{٤١}$ $\begin{vmatrix} ٤١ \\ -٤١ \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} -١ \\ ١ \end{vmatrix}$

س = −١ ، ص = ١

مجموعة الحل = {(−١ ، ١)}

(٢) امتحان منطقة القصر - ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

٢س + ص = ١٠ ، س + ص = ٦

بحلهما نجد وهي جـ = (٤ ، ٢)

∴ دالة الهدف ر = ٤س + ص

ر (٠ ، ٠) = صفر

ر (٠ ، ٥) = ٤ × ٥ + ٠ = ٢٠ عظمى

ر (٦ ، ٠) = ٠ + ٦ = ٦

ر (٤ ، ٢) = ٤ × ٤ + ٢ = ١٨

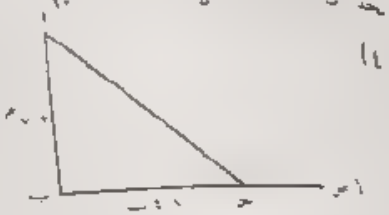
∴ القيمة العظمى عند أ = (٠ ، ٥)

٣س + ٢ص = ٠

س + ٤ص = ١

بحل المعادلتين

جـ (س = $\frac{١}{٥}$ ، ص = $\frac{٣}{١٠}$)



يفرض أن (θ) زاويه رفع الشمس

ظا θ = $\frac{٧,٢}{٤,٨}$

∴ θ = ٥٦° ١٨' ٣٦"

ب) جا θ + جتا θ = $\frac{٣}{٢}$ ، لمربع للطرفين

جا² θ + جتا² θ + ٢ جا θ جتا θ = $\frac{٩}{٤}$

٢ جا θ جتا θ = $\frac{٩}{٤}$ − ١ = $\frac{٥}{٤}$

جا θ جتا θ = $\boxed{\frac{٥}{٨}}$

جـ) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

الحل يقع في الربع الأول

ل١ : س + ص = ٦

س	٠	٦
ص	٦	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعه حل المتباينه .

س + ص = ٦

ل٢ : ٢س + ص = ١٠

س	٠	٥
ص	١٠	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينه

٢س + ص ≥ ١٠

الجزء المظلل هو حل المتباينات

حيث و = (٠ ، ٠) ، أ = (٥ ، ٠)

ب = (٦ ، ٠)

أما نقطة جـ فهي نقطه تقاطع المستقيمين

امتحان مادة الرياضيات التكميلية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

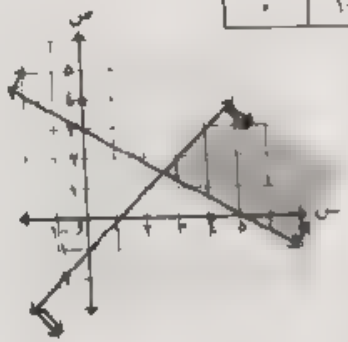
(٤) (أ) ل: ٣س + ٥ص = ١٥

٥	٠	س
٠	٣	ص

(٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة ،

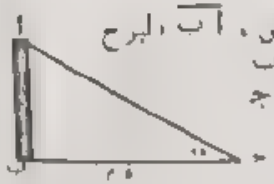
ل: ص = س − ١

١	٠	س
٠	−١	ص



(٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة ، تحدد المنطقة هو تحليل للمتباينات

(ب) حـ المنحنى ، $\overline{أب}$ البرج



ظا ٢٥ = $\frac{أب}{ب جـ}$

ظا ٢٥ = $\frac{أب}{٥٠}$

الارتفاع = أب = ٥٠ ظا ٢٥ ≃ ٢٣م

(٤) (أ) المساحة = $\frac{١}{٢}$ $\begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ١ \\ -٤ & ٢ & ١ \\ ١ & -٤ & ١ \end{vmatrix}$

= $\frac{١}{٢}$ × ٤٧ = ٢٣,٥ وحدة مربعة

(ب) ٢ص + ٣س = ٥ ، ٢س + ص = ٣

(٣) (أ) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س ، ص ∈ ح ، ن

الربع الأول

ل: س + ٣ص = ٧

٧	٠	س
٠	$\frac{٧}{٣}$	ص

(٠ ، ٠) ∉ لمتباينة

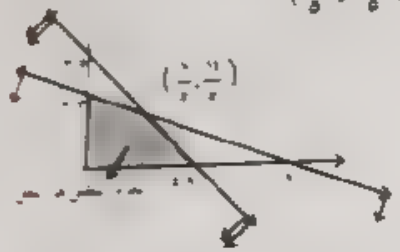
ل: ٣س + ٤ص = ١٤

$\frac{١٤}{٣}$	٠	س
٠	$\frac{٧}{٢}$	ص

(٠ ، ٠) ∉ لمتباينة

نقطة التقاطع :

$(\frac{٧}{٥} ، \frac{١٤}{٥})$



ر(٧ ، ٠) = ١٤١ ، ر(٠ ، ٣) = ١١٥

ر$(\frac{٧}{٥} ، \frac{١٤}{٥})$ = ٣٠ × $\frac{١٤}{٥}$ + ٥٠ × $\frac{٧}{٥}$ = ١٥١

∴ أكبر قيمة عندما س = $\frac{١٤}{٥}$ ، ص = $\frac{٧}{٥}$

(ب) الطرف الأيمن

= (١ + $\frac{ظا^٢ هـ}{جا^٢ هـ}$) × جا^٢ هـ

= $\frac{جا^٢ هـ + جتا^٢ هـ}{جا^٢ هـ}$ × جا^٢ هـ

= جا^٢ هـ = ١ − جتا^٢ هـ = الأيسر

(٢) (أ) ∴ أ − (أ^ت)^−١ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$

الطرف الأيمن = $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$

−٥ $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$ + ٢٢ $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

∴ الطرف الأيمن =

$\begin{pmatrix} ١٦-٤ & ١٢+٨+ \\ -١٢-٨ & ٩+١٦- \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} -١٠ & ٢٠ \\ ٢٠ & -١٥ \end{pmatrix}$

+ $\begin{pmatrix} ٢٢ & ٠ \\ ٠ & ٢٢ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ = □

= الأيسر

(ب) مساحة القطعة الدائرية

= $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (هـ − جا هـ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ (٢,٦١٧٩ − جا ١٥٠)

= ٢٦ سم^٢

(١) (أ) المنحنى متصل ، د كان متصلة ، د كان أ = أ^١

ويكون ... د كان محدد

أ = صفر

(ب) مساحة المضلع = $\frac{١}{٤}$ ن س^٢ ظا $\frac{π}{ن}$

حيث ن عدد أضلاع وطول الضلع س

مساحة المضلع = $\frac{١}{٤}$ × ٨ × ٣٦ ظا $\frac{١٨٠}{٨}$

= ١٧٣,٨ سم^٢

(جـ) المحيط = ٢ق + ل

١٢ = ٢ق + ٣ ، ق = $\frac{٩}{٢}$ سم

المساحة = $\frac{١}{٢}$ ل ق

= $\frac{١}{٢}$ × ٣ × $\frac{٩}{٢}$ = $\frac{٢٧}{٤}$ سم^٢

(د) بالفك : ٦س − ٨ = ١٠

∴ ٦س = ١٨ ∴ س = ٣

٥٩ = $\frac{١}{٢}$ ن^٢ $\frac{π}{ن}$ − جا ١٢٠

ن^٢ = ١٩٦,٢١٧ ، ن = ١٤ سم

$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \text{س} \cdot \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

$\text{،} \quad \text{ح} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$

$\text{أ} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = (٤ - ٣) = ١ \neq ٠$

المصفوفة لها معكوس

$\therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{\text{أ}} \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

$= \frac{١}{١} \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

$\text{أ}^{-١} = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

$\text{س} = \text{أ}^{-١} \text{ح} = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$

$\text{س} = \begin{pmatrix} ٥ + ٦ \\ -٥ + ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١١ \\ ١ \end{pmatrix}$

س = ١ ، ص = ١

مجموعة الحل = {(١ ، ١)}

(٩) امتحان منطقة المنوفية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) $\text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta + ٢\,\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta$

$= ٢\,\text{جا}\theta\,\text{جا}\theta = \text{واحد}$

(ب) $(\text{أ ب})^{-١} = \text{ب}^{-١}\,\text{أ}^{-١}$

$\text{ب}^{-١}\,\text{أ}^{-١} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & -١ \end{pmatrix}$

(جـ) $\text{م} = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ١ \\ -٤ & ٢ & ١ \\ ١ & -٤ & ١ \end{vmatrix} = ٢٣,٥$

وحدة مربعة.

(د) إن المصفوفة س = $\text{I} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(٢) (أ) س + ص + ٣ع = ٥

ص − ع = ٠ ، ٢س − ٤ع = ٢٠

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{vmatrix}$

$= (-٤ - ٢) - (-٦) = -١٢$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٥ & ١ & ٣ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ٢٠ & ٠ & ٤ \end{vmatrix}$

$= (٢٠ + ٢) - (٦) = -١٢$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٢٠ & ٤ \end{vmatrix}$

$= (١٠ - ١) - (٢) = -١٣$

$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٢٠ \end{vmatrix}$

$= (٢٠) - (١٠) = ١٠ = -١٢$

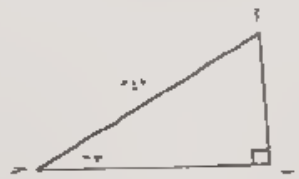
$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-١٢}{-١٢} = ١$

ص = ١ ، ع = ١

مجموعة الحل = {(١ ، ١ ، ١)}

(ب) أب ارتفاع الطائرة

$\text{جا}\,٦٣ = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{أب}}{٤٢}$



أب = ٤٢ جا ٦٣ = ٣٧,٤ م

(٣) (أ) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ الربع الأول

ل: س + ص = ٦

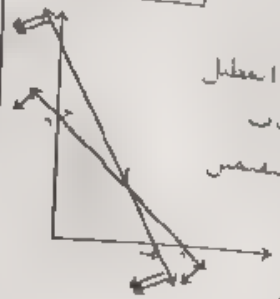
(٠ ، ٠) ∈ المتباينة

٦	٠	س
٠	٦	ص

٥	٠	س
٠	١٠	ص

ل: ٢س + ص = ١٠

(٠ ، ٠) ∈ المتباينة



بحرة أب و جـ اعطال

هو نحن نسمي ب ب

نقطة تقاطع المستقيمين

هي (٤ ، ٢)

ر(٠ ، ٠) = ٠

ر(٥ ، ٠) = ٢٠ ،

ر(٤ ، ٢) = ١٦ + ٢ = ١٨

القيمة الصغرى عند (٠ ، ٠)

ب) $\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \frac{١}{٢}$

$\text{جا}\theta = \frac{١}{٢}$

مجموعة الحل في [٠ ، ٣٦٠°[هي ٣٠ ، ١٥٠

يعني $\left\{\frac{\pi}{٦} ، \frac{٥\pi}{٦}\right\}$

الحل العام

$\left\{\frac{\pi}{٦} + ٢\pi\,\text{ن} ، \frac{٥\pi}{٦} + ٢\pi\,\text{ن}\right\}$

حيث ن ∈ ص

(٤) (أ) شبه متماثلة يعني أ = −أ^ت

$\begin{vmatrix} ٠ & -٢\text{س} & -٥ \\ \text{ع}+٦ & ٠ & ٣\text{ع} \\ ٣\text{ص}+\text{س} & ٦ & ٠ \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} ٠ & \text{ع}+٦ & ٣\text{ص}+\text{س} \\ -٢\text{س} & ٠ & ٦ \\ -٥ & ٣\text{ع} & ٠ \end{vmatrix}$

$-٢\text{س} = -\text{ع} - ٦ \quad \ldots\ldots (١)$

$٣\text{ع} = -٦ \therefore \text{ع} = -٢$

ومن (١)

$-٢\text{س} = \text{ع} + ٦$

$\because ٣\text{ص} + \text{س} = ٥$

$\therefore ٣\text{ص} + ٢ = ٥$

$\therefore ٣\text{ص} = ٣$

$\begin{vmatrix} ٢\text{س} & -٢+٦ \\ \text{س} = ٢ & \text{ص} = ١ \end{vmatrix}$

(ب) سوف حلها في الطلوبة رقم (٢)ب ٢٠١٨

(١٠) امتحان منطقة الشرقية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) س − ٥ ، ص = ٣ س + ص = ٨

(ب) $\text{أ}^{٢} = ٢٥ \therefore \text{أ} = \pm ٥$

(جـ) $\text{جا}\theta = \frac{١}{٢}$ و $(\theta) = ٣٠°\,،\,١٥٠°$

(د) $\text{ظا}^{٢}\theta + ١ = \text{قا}^{٢}\theta$

$\text{جتا}^{٢}\theta + ١ = ٥ \therefore \text{ظا}^{٢}\theta = ٤$

(٢) (أ) $\text{م} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ١ & ١ & ٣ \\ ١ & ٥ & -٢ \end{pmatrix}$

$\frac{١}{٢}\left[(-٤ + ١٥ - ٤) - (-٢ - ٢٠ + ٦)\right]$

$= \frac{٢٣}{٢}$ وحدة مربعة

(ب) الطرف الأيمن = $\text{جا}\theta \times \text{جتا}\theta \times \frac{\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta}$

$= \text{جا}^{٢}\theta = ١ - \text{جتا}^{٢}\theta =$ الأيسر

(٣) (أ) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

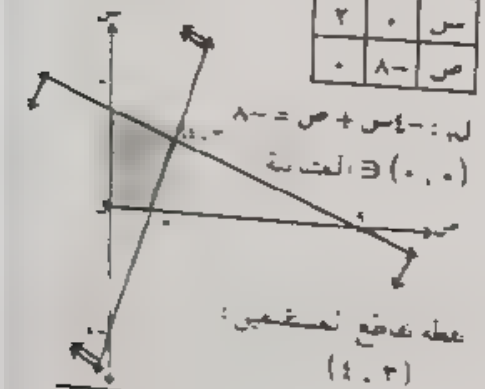
يعني الحل في الربع الأول

ل: ٢س + ٣ص = ١٨

(٠ ، ٠) ∈ المتباينة

٩	٠	س
٠	٦	ص

٢	٠	س
٠	−٨	ص



ل: −٤س + ص = −٨

(٠ ، ٠) ∈ المتباينة

نقطة تقاطع المستقيمين:

(٣ ، ٤)

ر(٠، ٠) = ر(٢، ٠) = ٤

ر(٠، ٦) = ر(٣، ٤) = ٤ + ٦ = ١٠

لقيمة العظمى لدالة الهدف عندما

س = ١٢ ، ص = ٤ وتساوى ١٠

(ب) المعجم ٢س + ل

٢٥ = ٢س + ٧ ، ٢س = ١٨ ∴ س = ٩

لمساحة = ½ ل س

= ½ × ٧ × ٩ = ٦٣/٢ سم²

(٤) (أ) ص² = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

= $\begin{vmatrix} 1 & -2+6 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$

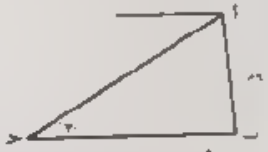
٢ص = $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$ ، |٢| = $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

الطرف الأيمن

= $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$ − $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$ − $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

= $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ = ▭ = لأيمن

(ب)



جا ٣٠ = أب/أجـ ، جا ٣٠ = ٦٠/أجـ

أجـ = ١٢٠م

(١١) امتحان منطقة الغربية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) قيمة س = ص على النظم ٢ × ١

(ب) س⁻¹ = $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

(جـ) ١٦ − ٨ = ١٠ ، أ = ٣

(٤) ١ + ظا ٤٥ = ٢

(٢) (أ) سبق برهنة ذلك الـ ... ٢٠١٨

(ب) تم حل ذلك في الشرقية (٣) (ب) ٢٠١٨

(٣) (أ)

بفرض أن :

أب البرج

المطلوب طول ب جـ

ظا ٣٦ ٢٨° = ٦٠/ب جـ

ب جـ = ٦٠/ظا ٣٦ ٢٨° = ١١٠م

(ب) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

الحل يقع في الربع الأول

ل : ٣ص + س = ١٥

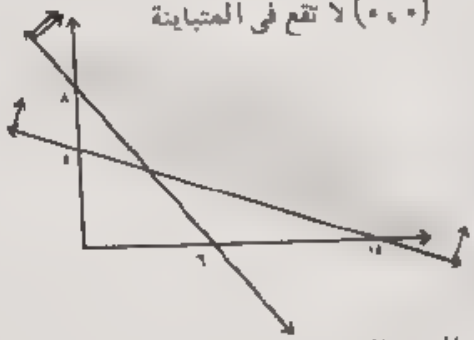
س	٠	١٥
ص	٥	٠

(٠، ٠) لا تقع في المتباينة

ل : ٤س + ٣ص = ٢٤

س	٠	٦
ص	٨	٠

(٠، ٠) لا تقع في المتباينة



الجزء المظلل هو الحل

نقطة تقاطع المستقيم (٣، ٤)

ر(١٥، ٠) = ٣ × ٠ + ٢ × ١٥ = ٣٠

ر(٨، ٠) = ٣ × ٨ + ٢ × ٠ = ٢٤

ر(٣، ٤) = ٣ × ٣ + ٢ × ٤ = ١٨

أقل ما يمكن عند (٣، ٤) وهو ١٨

(١٢) امتحان منطقة البحيرة ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) جا θ حتا θ × جا θ / جا θ = جا² θ

∴ المقدار يساوى جا² θ

(ب) المصفوفة أب على النظم ٢ × ١

(جـ) ظا θ = ١/√٣ ∴ ق(θ) = ٣٠°

(٥) التي تحقق المتباينات هي النقطة (١، ١)

(٢) (أ) سبق حلها في القليوبية

رقم (٢) (أ) ٢٠١٨

(ب) سبق حلها في الشرقية

رقم (٣) (أ) ٢٠١٨

(٣) (أ) سبق حلها في الشرقية

رقم (٢) (أ) ٢٠١٨

(ب) من هندسة الشكل

ق = ٥ سم

ظا أ م = ٤/٣

∴ ق(أ م ب) = ٥٣° ٧′ ٤٨″

∴ قياس الزاوية المركزية (أ م ب)

= ١٠٦° ١٥′ ٣٧″

∴ جا ١٠٦° ١٥′ = ٢٤/٢٥ ،

θ° = ١٠٦/١٨٠ π ≃ ١,٨٥٤٦ ،

∴ مساحة القطعة الدائرية

= ½ ق² (θ° − جا θ)

= ½ × ٢٥ × ٠,٨٩٤٥ ≃ ١١ سم²

(٤) (أ) س + ٣ص = ٥

٢س + ٥ص = ٨

أ = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Δ = $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ = ٥ − ٦ = −١ ≠ ٠

المصفوفة لها معكوس

أ⁻¹ = ١/(−١) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

س = أ⁻¹ جـ

$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} -25+24 \\ 10-8 \end{pmatrix}$

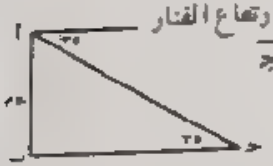
∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

∴ س = −١ ، ص = ٢

∴ مجموعة الحل = {(−١، ٢)}

(ب) أب ارتفاع المنار

المطلوب أجـ



جا ٣٥ = أب/أجـ = ٥٠/أجـ

أجـ = ٥٠/جا ٣٥ ≃ ٨٧م

(١٣) امتحان منطقة سيوط ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) أ + أ⁻¹ = ▭

فإن أ شبه متماثلة لأن أ⁻¹ = −أ

(٤) (أ) مساحة = ٨ × ٨ × ½ = ٣٢ سم²

(ب) [illegible]

(١٤) امتحان منطقة القاهرة ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

(١) (أ) س − ٣ص = ٤ ..... (١)

٢س + ص = ٢ ..... (٢)

بضرب المعادلة (١) × −٢

−٢س + ٦ص = ٨

٢س + ص = ٢

٧ص = ١٠ ∴ ص = ١٠/٧

بالتعويض في (١)

∴ س = −٤ + ٣٠/٧ = −٢/٧

مجموعة الحل {(−٢/٧ ، ١٠/٧)}

(ب) ∵ محيط القطاع = ٢نق + ل = ١٠

٢نق + ٢ = ١٠ ∴ نق = ٤ سم

المساحة = ½ ل نق

= ½ × ٢ × ٤ = ٤ سم²

(جـ) ∵ جا²θ + ٢جاθ جتاθ

+ جتا²θ − ٢جاθ جتاθ = واحد

(٢) عدد المباريات = ٩

(٣) (أ) الطرف الأيمن = (جتا س × ظا س)/(قا س)

= جتا س × (جا س/جتا س) × جا س

= جا²س = ١ − جتا²س = الأيسر

ب) الطرف الأيمن

= [illegible] × [illegible] × [illegible]

= [illegible] الطرف الأيسر

(٣) (أ) [illegible]

= [illegible]

محدده = ١ − ١ = ٠

(ب) θ° = ل/نق = ٢٠/١٢ = ٥/٣

∴ θ° = ٥/٣ × ١٨٠/π ≈ ٩٥° ٣٠′

مساحة القطعة الدائرية

= ½ نق²(θ° − جا θ°)

= ½ × ١٤٤ × (٥/٣ − جا ٩٥° ٣٠′)

= ٤٨ سم²

(٤) (أ) نفرض أن

س = الضلع

المطلوب

طول أجـ

جا ٣٥° = س/أجـ

∴ أجـ = س/جا ٣٥° = ٨٧ م

(ب) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ تعني أنه يقع في الربع الأول:

٨	٠	س
٠	٨	ص

ل = س + ص = ٨ ،

ل = ص = ٣

مستقيم يوازي محور السينات

ملحوظة: ٠ + ٠ = ٨

(٠ ، ٠) ∉ الحل للمستقيم

٠ ≤ ٣

(٠ ، ٠) ∈ الحل للمستقيم

من الشكل المجاور المظلل الحل للمتباينات

هو Δ أ ب جـ ، حيث أ = (٠ ، ٠)

ب = (٥ ، ٣) ، جـ = (٠ ، ٣)

∴ ٣س + ٢ص

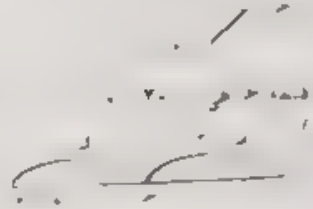
∴ ٣ × ٥ + ٢ × ٣ = ٢١

، ص = ٣ × ٥ + ٢ × ٣ = ٢١ عظمى

∴ ص = ٣ × ٠ + ٢ × ٣ = ٦

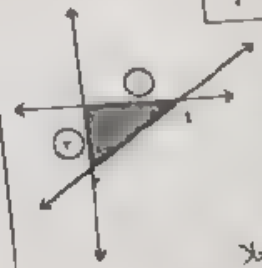
قيمة الدالة [illegible] عند النقطة (٥ ، ٣)

حلول امتحانات الهندسة التحليلية



٤	٠	س
٠	-٣	ص

(٤) ٣س - ٤ص = ١٢



مساحة المثلث

= ½ × ٤ × ٣

= ٦ وحدة مربعة

(٥) ارسم لس حلا

ق ١٨

(م + ك) - ب = ٠ ..... (١)

ق ٨ ب

٢م + ٣ك = ٤ب ..... (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع

أب + ٤ب

(م + ك) + (٤م + ك)

أ = ٠ ، ٤

(٢) (أ)

(١) $\overline{ق_١} = -٦ جا \frac{٢\pi}{٣} \overline{س} + ٦ جا \frac{٢\pi}{٣} \overline{ص}$

$\overline{ق_٢} = -٣\overline{س} + ٣\sqrt{٣}\overline{ص}$

$\overline{ق_٣} = -٦ جا \frac{٤\pi}{٣} \overline{س} + ٦ جا \frac{٤\pi}{٣} \overline{ص}$

$٣\overline{س} - ٣\sqrt{٣}\overline{ص}$

∴ محصلة هذه القوى

$\overline{ق_١} + \overline{ق_٢} + \overline{ق_٣}$

$٣\overline{س} + ٣\sqrt{٣}\overline{ص} - ٣\overline{س}$

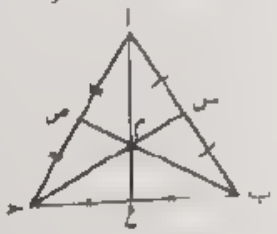
$٣\sqrt{٣}\overline{ص} + ٩\overline{س} + ٤\overline{ص}$

$\overline{ح} = ٣\overline{س} + ٤\overline{ص}$

$\|\overline{ح}\| = ٣\overline{س} + ٤\overline{ص}$

$\|\overline{ح}\| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$ وحدة قوة

(٢)



في Δ م ب جـ ،

$\overline{م ع}$ متوسط في المثلث م ب جـ

∴ $٢\overline{م ع} = \overline{م ب} + \overline{م جـ}$ ..... (١)

$\overline{م ص} = \frac{١}{٢}\overline{ب م}$ ، $\overline{م س} = \frac{١}{٢}\overline{جـ م}$

المطلوب : $\overline{م س} + \overline{م ص} + \overline{م ع}$

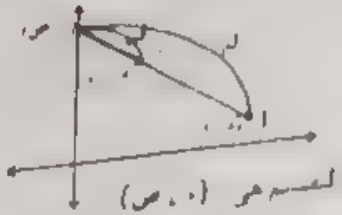
$= \frac{١}{٢}\overline{جـ م} + \frac{١}{٢}\overline{ب م} + \overline{م ع}$

$= \frac{١}{٢}(\overline{م جـ} + \overline{م ب}) + \overline{م ع}$ من (١)

$= \frac{١}{٢}(٢\overline{م ع}) + \overline{م ع}$

$= \overline{م ع} + \overline{م ع} = \overline{صفر}$

(٣)



نقطة التقسيم هي (٠ ، ص)

$\overline{صفر} = \frac{ل_١ \times ٢ + ل_٢ \times ٥}{ل_١ + ل_٢}$

$٢ل_١ + ل_٢ \times ٥ = ٠ \Leftarrow ٢ل_١ = -٥ل_٢$

$\frac{ل_١}{ل_٢} = -\frac{٥}{٢} < ٠$

التقسيم من الخارج بنسبة ٥ : ٢ كما بالرسم

(٤) $م_١ = ٢ - \sqrt{٣}$ ، $م_٢ = ٢ + \sqrt{٣}$

$م_١ م_٢ = ٤ - ٣ = ١$

$م_١ - م_٢ = ٢ - \sqrt{٣} - ٢ - \sqrt{٣} = -٢\sqrt{٣}$

$ظا \theta = \left| \frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢} \right|$ حيث (θ) الحادة

$\therefore ظا \theta = \left| \frac{-٢\sqrt{٣}}{١ + ١} \right| = \sqrt{٣}$

$\therefore ق(\theta) = ٦٠°$

∴ قياس الزاوية المنفرجة = ١٨٠° - ٦٠°

= ١٢٠°

(٥) $م_١ = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$

المعادلة الثانية : ٢س - ٣ص = ١٨

(بالضرب × ٦) ، $\therefore م_٢ = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

$\because ل_١ // ل_٢$ ∴ $م_١ = م_٢$

$\frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\boxed{أ = ٢}$

(٢) امتحان منطقة القليوبية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

= ٢ وحدة طول

(٣) أولاً : اس ص

$\frac{\text{س} + ٣}{٢} = ٤ \Leftarrow$ س + ٣ = ٨

س = ٥

$\frac{\text{ص} + ٧}{٢} = ٦ \Leftarrow$ ص + ٧ = ١٢

ص = ٥ ، أ = (٥ ، ١)

$\text{م}_{\text{ب}} \times \text{م}_{\text{أ}} = -١$

$\frac{\text{ك}}{٣} \times \frac{٢}{٤-} = -١$ ، $\boxed{\text{ك} = \frac{١٢}{٢} = ٦}$

(٤) $\text{م}_{\text{أ}} = \frac{٢}{٣}$ ، $\text{م}_{\text{ب}} = \frac{٤}{٣}$

$\text{م}_{\text{أ}} \times \text{م}_{\text{ب}} = \frac{٢}{٣}$

(٥)

معطى المقسم (٢ ، ٥)

(٦) (أ) (١) أولاً : $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

$= (٣ ، \text{ك}) - (٢ ، ٧) = (-٤ ، \text{ك} - ٢)$

$|\overrightarrow{\text{أب}}| = ٥ = \sqrt{١٦ + (\text{ك} - ٢)^٢}$

$\therefore ٢٥ = ١٦ + \text{ك}^٢ + ٤ - ٤\text{ك}$

$\therefore \text{ك}^٢ - ٤\text{ك} - ٥ = ٠$

$(\text{ك} - ٥)(\text{ك} + ١) = ٠$

$\therefore \text{ك} = ٥ ، \text{ك} = -١$

ثانياً : المعادلة $\boxed{\text{س} = ١}$

(٢) أولاً : معيار $\|\overrightarrow{\text{و}}\|$

$= \sqrt{٩٤ + ٢ \times ٦٤} = ١٦$

$\text{ظا}\,\theta = \frac{٨}{١٨} = \frac{١}{٢\sqrt{٧}}$

(٣) نحل المعادلتين

س + ص = ٥ ، ٢س + ص = ٨

س = ٣ ، ص = ٢

نقطة التقاطع = (٣ ، ٢)

معادلة المستقيم المار بالنقطتين

(٣ ، ٢) ، (٢ ، ١)

الميل = $\frac{٢ - ١}{٣ - ٢} = ١$

معادلة المستقيم : $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ٢} = ١$

ص − ١ = س − ٢

ص − س + ١ = ٠

(٤) مساحة المضلع المنتظم

$\frac{١}{٢}$ ن س^٢ ظتا $\frac{\pi}{\text{ن}}$

مساحة الشكل الخماسي المنتظم

$\frac{١}{٢} \times ٥ \times (١٦)^٢$ ظتا $\frac{\pi}{٥}$

$\frac{١}{٢} \times ٥ \times (١٦)^٢ \times \frac{١}{\text{ظا}\,٣٦}$

٤٤٠,٤٤ سم^٢

(٥) في Δ أ ب ج :

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أ ج}}$ بالضرب × ٢

$٢\overrightarrow{\text{أب}} + ٢\overrightarrow{\text{ب ج}} = ٢\overrightarrow{\text{أ ج}}$ ..... (١)

في Δ أ د ج

$\overrightarrow{\text{أ ج}} + \overrightarrow{\text{ج د}} = \overrightarrow{\text{أ د}}$

بالضرب × ٣

$٣\overrightarrow{\text{أ ج}} + ٣\overrightarrow{\text{ج د}} = ٣\overrightarrow{\text{أ د}}$ ..... (٢)

بجمع (١) ، (٢) $٥\overrightarrow{\text{أ د}} = ٢\overrightarrow{\text{أ ج}} + ٣\overrightarrow{\text{ج د}}$

$+ ٢\overrightarrow{\text{أب}} + ٢\overrightarrow{\text{ب د}}$

(٣) امتحان منطقة المنوفية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(٤) (أ) (١)

(٢)

(٣)

(٤) $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أ ج}}$

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج أ}}$

$= ١٢\overrightarrow{\text{ج أ}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ج أ}} = ١٢\overrightarrow{\text{ج أ}}$

(ب) $٢\overrightarrow{\text{ل}} + ٥(\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}})$

$- ٢(\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}}) - ٣(\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}})$

$٢\overrightarrow{\text{ل}} + ٥\overrightarrow{\text{ص}} - ٥\overrightarrow{\text{ع}}$

$- ٢\overrightarrow{\text{ص}} - ٢\overrightarrow{\text{ع}} - ٣\overrightarrow{\text{ص}} + ٣\overrightarrow{\text{ع}}$

$٢\overrightarrow{\text{ل}} - ٥\overrightarrow{\text{ص}} - ٣\overrightarrow{\text{ص}} - ٢\overrightarrow{\text{ع}}$

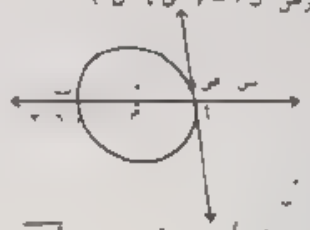
$٢\overrightarrow{\text{ل}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}} - ٢\overrightarrow{\text{ع}}$

$\overline{ل} = \overline{ج} - \overline{أ}$

$\overline{ل} = \overline{ب}$ وهو المطلوب

(ب) نقطة "م" تقع في منتصف $\overline{أب}$

وبفرض $\overline{ن}$ ا = (س ، ص)



وبفرض $\overline{ن}$

ا = (س ، ص) حيث م منتصف $\overline{أب}$

$\frac{س + ٦}{٢} = -٢$

س + ٦ = −٤ $\boxed{س = -٢}$

$\frac{ص + ٣}{٢} = ١$ ص + ٣ = ٢

$\boxed{ص = -١}$

نقطة ا = (−٢ ، ١)

المماس عمودي على نصف $\overline{أب}$

من نصف $\overline{أب}$ = $\frac{١ + ٣}{-٢ - ٦}$

= $\frac{٤}{-٨} = -\frac{١}{٢}$

$\overline{أب}$ ، المماس عند ا متعامدان

$م_١ م_٢ = -١$

ميل المماس عند ا = ٢

وبفرض النقطة (−٢ ، ١) : $\frac{ص + ١}{س - ٢} = ٢$

ص + ١ = ٢س − ٤

$\boxed{ص - ٢س + ٥ = ٠}$

(٢) (أ) (١) ٣ك $\overline{أ}$ = −١٥ $\overline{أ}$

٣ك = −١٥

٣ك = ١٥

٣ك = ١٥ ∴ ٣ك = −١٥

ك = ٥ ، ك = −٥

(٢) رسم ب ج

لب عند ج

لمعادلة أبي تقع على محور السينات هي

(س ، ٠)

ص = $\frac{ل_١ ص_٢ + ل_٢ ص_١}{ل_١ + ل_٢}$

صفر = $\frac{ل_١ \times -١ + ل_٢ \times ٤}{ل_١ + ل_٢}$

−٨ل₁ + ٤ل₂ = ٠

٨ل₁ = ٤ل₂

$\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢} > ٠$

التقسيم من الداخل كما هو واضح من الرسم وبنسبة ١ : ٢

(٣) طول العمود

= $\frac{٣ \times ٩ + ٤ \times ٥ - ١٢}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

= $\frac{٣٥}{٥}$ = ٧ وحدة طول

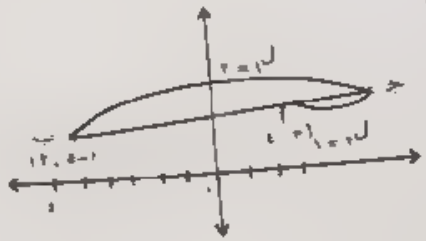
(٤) من الرسم "م" نقطة تلاقي القطرين

٢ $\overline{ب م}$ = $\overline{ب ء}$

$\overline{أب}$ + ٢ $\overline{ب م}$

= $\overline{أب}$ + $\overline{ب ء}$ = $\overline{أ ء}$

(ب)



$\frac{ب ج}{أب} = \frac{٢}{١} = \frac{ب ج}{أب}$

بفرض ج = (س ، ص)

س = $\frac{ل_١ س_٢ + ل_٢ س_١}{ل_١ + ل_٢}$

= $\frac{٢ \times ٦ + ١ \times -٥}{٢ + ١}$ = $\frac{٦ + ٥}{٣}$ = ١١

ص = $\frac{ل_١ ص_٢ + ل_٢ ص_١}{ل_١ + ل_٢}$ = $\frac{٢ \times ٨ + ١ \times ٢}{٢ + ١}$ = ٦

نقطة ج = (١١ ، ٦)

(ج) معادلة المستقيم :

(٢س + ص − ٥)

+ ك(٣س − ٢ص − ٤)

يمر بالنقطة (٥ ، ٢)

تحقق المستقيم .

∴ (٢ × ٥ + ٢ − ٥)

+ ك(٣ × ٥ − ٢ × ٢ − ٤) = ٠

∴ ٧ + ٧ك = ٠ ∴ ك = −١

المعادلة هي .

(٢س + ص − ٥) − (٣س − ٢ص − ٤) = ٠

−س + ٣ص − ١ = ٠

$\boxed{٣ص - س - ١ = ٠}$

ملحوظة : يوجد طريقة أخرى للحل

(٤) امتحان منطقة الشرقية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) $\overline{أب}$ = $\overline{ب}$ − $\overline{أ}$

= (٣ ، −١) − (٢ ، ٦)

= (−٣ ، −٤)

(٢) شرط التعامد $م_١ م_٢$ = −١

$\frac{٢}{٣} \times \frac{ك}{٢}$ = −١ ∴ $\boxed{ك = -٣}$

(٣) $\|\overline{أ}\|$ = $\sqrt{٤ + ٣ \times ٤}$ = ٤

ط ك = $\frac{\sqrt{٣} \times ٢}{٢}$ = $\sqrt{٣}$

ق(ق) = ٦٠°

$\overline{أ}$ = (٤ ، ٦٠°)

(٤) $\overline{ن}$ = (٥ ، صفر) + ك(٤ ، ٣)

(س ، ص) = (٥ ، ٠) + ك(٤ ، ٣)

س = ٥ + ٤ك ، ص = ٣ك

$\frac{س - ٥}{٤} = \frac{ص}{٣}$ ⟸ ٣س − ١٥ = ٤ص

∴ ٣س − ٤ص − ١٥ = ٠

طول العمود = $\frac{|٣ \times ٢ - ٤ \times ٢ - ١٥|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

= $\frac{١٥}{٥}$ = ٣ وحدة طول

(ب) ميل الأول = $\frac{-٢}{١}$ = ٢

ميل الثاني = $\frac{-٢}{١}$ = −٢

∴ الميلان متساويان

∴ المستقيمان متوازيان بفرض س = ٠

في المعادلة الأولى

∴ ص = ٤ ∴ النقطة (٠ ، ٤)

البعد بين المستقيمان هو البعد بين النقطة (٠ ، ٤)

والمستقيم ٢س + ص + ٣ = ٠

طول العمود = $\frac{|٢ \times ٠ + ٤ + ٣|}{\sqrt{٥}}$

= $\frac{٧}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول

(ج) المعادلة الاتجاهية هي :

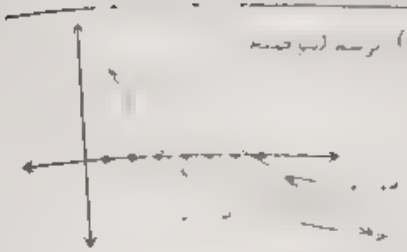
$\overline{ر}$ = (٣ ، −١) + ك(−٣ ، ٥)

ومنها توجد المعادلتان الوسيطيتان أو البارامترية

وهما : س = ٣ − ٣ك

ص = −١ + ٥ك

$\frac{س - ٣}{-٣}$ = ك ، ك = $\frac{ص + ١}{٥}$



(ج) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل س}_1 + \text{ل}_2 \text{س}_2}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$

س $= \frac{3 \times 1 + 2 \times 2}{3 + 2} = -17$

ص $= \frac{3 \times -1 + 2 \times 5}{3 + 2} = -13$

نقطة = (−17 ، −13)

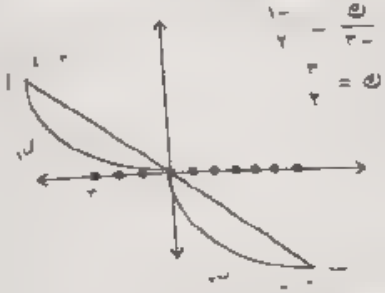
(٥) امتحان منطقة البحيرة ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(١) (أ) شرط توازي م₁ = م₂

$\frac{\text{ك}}{-3} = \frac{-1}{2}$

ك = $\frac{3}{2}$

(٢)



نقطة التي تقع على محور السينات هي (س ، ٠)

ص = $\frac{\text{ل}_1\text{ص}_1 + \text{ل}_2\text{ص}_2}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$

صفر = $\frac{\text{ل}_1 \times 8 + \text{ل}_2 \times 4}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$

8ل₁ = −4ل₂

$\frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2} = \frac{1}{2} > 0$ .. النسبة 1 : 2

(٣) 4ك $\overline{\text{أ}}$ = 3 $\overline{\text{أ}}$

4ك = 3 ، ك = $\frac{3}{4}$

(٤) م = ميل الأول = $\frac{-2}{3}$ = $\frac{2}{3}$

م₂ = $\frac{3}{2}$ وبضرب المعامد

م₁ × م₂ = −1 ، $\frac{2}{3} \times \frac{3}{\text{ب}} = -1$

$\boxed{\text{ب} = 2}$

(ب) طول العمود = $\frac{|5 \times 1 - 12 \times 2 - 7|}{\sqrt{25 + 144}}$

= $\frac{|-72|}{13}$ = 2 وحدة طول

(ج) بحل المعادلتين 3س + 2ص = 7

2س − 3ص = −4

س = 1 ، ص = 2

∴ نقطة تقاطع المستقيمين هما (1 ، 2)

والنقطة (3 ، 4)

∴ الميل $\frac{4 - 2}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$

المعادلة المتجهة = أي نقطة + ك(1 ، 1)

$\overline{\text{ر}}$ = (3 ، 4) + ك(1 ، 1)

أو $\overline{\text{ر}}$ = (1 ، 2) + ك(1 ، 1)

(٢) (أ) (١) $\frac{\text{س}}{2} + \frac{\text{ص}}{3} = 1$ بالضرب × 6

$\boxed{3\text{س} + 2\text{ص} = 6}$

(٢) ظا θ = الميل للمستقيم

م = 0,75

م = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ = 0,75 ، $\boxed{\text{أ} = 3}$

(٣) $\overline{\text{أ}}$ = $\sqrt{64 + 3 \times 64}$ = $\sqrt{256}$ = 16

جتا θ = $\frac{8}{8/3} = \frac{1}{3/}$

ق(θ) = 30°

الصورة القطبية = (16 ، 30°)

= (16 ، $\frac{\pi}{6}$)

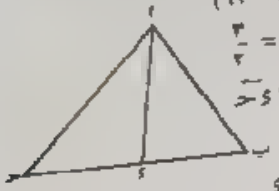
(٤) 2 $\overline{\text{أ}}$ − 3 $\overline{\text{ب}}$

= 2(6 ، −2) − 3(4 ، 3)

= (12 ، −4) + (−12 ، −9)

= (0 ، −13)

(ب)



$\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{3}{2}$

2 $\overline{\text{ب ء}}$ = 3 $\overline{\text{ء جـ}}$

في Δ ا ب ء

$\overline{\text{ا ب}}$ + $\overline{\text{ب ء}}$ = $\overline{\text{ا ء}}$ بالضرب × 2

∴ 2 $\overline{\text{ا ب}}$ + 2 $\overline{\text{ب ء}}$ = 2 $\overline{\text{ا ء}}$ ..... (1)

في Δ ا ء جـ :

$\overline{\text{ا جـ}}$ + $\overline{\text{جـ ء}}$ = $\overline{\text{ا ء}}$ بالضرب × 3

∴ 3 $\overline{\text{ا جـ}}$ + 3 $\overline{\text{جـ ء}}$ = 3 $\overline{\text{ا ء}}$ .. (2)

بالجمع (1) ، (2)

2 $\overline{\text{ا ب}}$ + 2 $\overline{\text{ب ء}}$ + 3 $\overline{\text{ا جـ}}$ + 3 $\overline{\text{جـ ء}}$ = 5 $\overline{\text{ا ء}}$

(3) ..

2 $\overline{\text{ب ء}}$ = 3 $\overline{\text{ء جـ}}$ = −3 $\overline{\text{جـ ء}}$

(3) صبح بعد وضع 2 $\overline{\text{ب ء}}$ = −3 $\overline{\text{جـ ء}}$

2 $\overline{\text{ا ب}}$ − ~~3 $\overline{\text{جـ ء}}$~~

+ 3 $\overline{\text{ا جـ}}$ + ~~3 $\overline{\text{جـ ء}}$~~ = 5 $\overline{\text{ا ء}}$

∴ 2 $\overline{\text{ا ب}}$ + 3 $\overline{\text{ا جـ}}$ = 5 $\overline{\text{ا ء}}$

(جـ) ميل المستقيم المعطى = $\frac{-1}{2}$

المستقيم المطلوب يوازي المعطى

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-1}{2}$

∴ معادلة المستقيم ⇐ $\frac{\text{ص} + 5}{\text{س} - 3} = \frac{-1}{2}$

2ص + 10 = −س + 3

2ص + س + 7 = 0

(٦) امتحان منطقة القاهرة ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) من رسمها نجد أن

البعد = ٥ وحدات طول

(ب) $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$

$\frac{س_٢}{ص_٢} = \frac{س_١}{ص_١} \Leftarrow \frac{٨}{ك} = \frac{-٤}{٣}$

$-٤ك = -٢٤$ ، $\boxed{ك = ٦}$

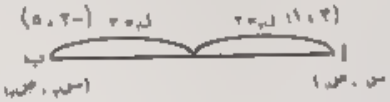
(جـ) المعادلة الكارتيزية ص = ٥

(د) نقطة تلاقي المتوسطات =

$\left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣}\right)$

$= \left(\frac{٨+٢+٥}{٣} ، \frac{٠+٢+٣}{٣}\right) = (٥ ، ٠)$

(٢) (أ) $س = \frac{ل_١ س_٢ + ل_٢ س_١}{ل_١ + ل_٢}$



$= \frac{٢ \times -٢ + ٣ \times ٣}{٣ + ٢} = \frac{٥}{٥} = ١$

$ص = \frac{٢ \times ٥ + ٣ \times ١}{٣ + ٢} = \frac{١٣}{٥}$

النقطة $(١ ، \frac{١٣}{٥})$

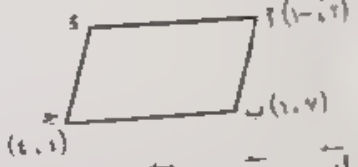
(ب) $م = \frac{١}{٢}$ ، $\overline{ى} = (٣ ، ١)$ ،

والنقطة (٢ ، -١)

∴ المعادلة المتجهة

$\overline{ر} = (٢ ، -١) + ك (٣ ، ١)$

(٣) (أ)



$\overline{أب} = \overline{دجـ}$ ، $\overline{ب} - \overline{أ} = \overline{جـ} - \overline{د}$

$\overline{د} = \overline{جـ} + \overline{أ} - \overline{ب}$

$= (٤ ، ١) + (٢ ، -٢) - (٧ ، ١)$

$= (-١ ، ٢)$

(ب) ٤ص = ٣س + ١١

$ص = \frac{٣}{٤} س + \frac{١١}{٤}$

$م_١= \frac{٣}{٤}$ ، $م_٢ = \frac{١}{٧}$

$ظا هـ = \left|\frac{م_٢ - م_١}{١ + م_١ م_٢}\right| = \left|\frac{\frac{١}{٧} + \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{١}{٧} \times \frac{٣}{٤}}\right|$

$ظا هـ = \frac{\frac{٢٥}{٢٨}}{\frac{٢٥}{٢٨}} = ١$ ، $ق(هـ) = ٤٥°$

(٤) (أ) ٧س + ص = -٣ ⟵ (١)

٥س - ص = ٣ ⟵ (٢)

من (١) ، (٢) بحلهما

∴ س = ٠ ، ص = -٣

∴ نقطة تقاطع المستقيمين (٠ ، -٣)

، ميل المستقيم المطلوب = $\frac{١ + ٣}{٢ - ٠}$

$= \frac{٢}{٢} = ١$

∴ معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل

$م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$

$\frac{ص + ١}{س - ٢} = ١$ ، ص + ١ = س - ٢

$\boxed{ص = س - ٣}$

(ب) معادلة المستقيم المار بالنقطتين

$م = \frac{٠ + ٣}{٤ - ٠} = \frac{٣}{٤}$

∴ معادلة المستقيم : $\frac{ص + ٣}{س - ٠} = \frac{٣}{٤}$

∴ ٤ص + ١٢ = ٣س

∴ ٣س - ٤ص - ١٢ = ٠

[معادلة المستقيم المطلوب]

بعد العمود = $\frac{|٣ \times ٥ - ٤ \times ٢ - ١٢|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

$= \frac{٥}{٥}$ وحدة طول

(٧) امتحان منطقة القليوبية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) شرط التعامد

هو $م_١ \times م_٢ = ١$ ، $\frac{٣}{٢} \times \frac{-١}{٣} = -١$

$\boxed{أ = ٢}$

(ب) المعادلة هي :

$\overline{ر} = (٢ ، -٣) + ك (٣ ، ٤)$

(جـ) $٢\overline{أ} - ٣\overline{ب}$

$= ٢(٦ ، -٢) - ٣(٤ ، ٣)$

$= (٠ ، -١٣)$

$|٢\overline{أ} - ٣\overline{ب}| = \sqrt{٠ + ١٦٩} = ١٣$

(د) $م_١ = -\frac{١}{٣}$ ، $م_٢ = ٢$

$ظا هـ = \left|\frac{م_٢ - م_١}{١ + م_١ م_٢}\right|$

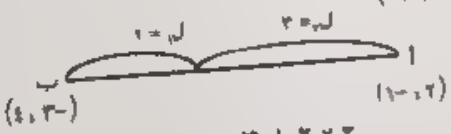
$= \left|\frac{٢ - \frac{١}{٣}}{١ - \frac{١}{٣} \times ٢}\right| = \frac{\frac{٧}{٣}}{\frac{١}{٣}}$

ظا هـ = ٧ ، $ق(هـ) = ٨١° ٥٢'$

(٢) (أ) طول العمود = $\frac{|٥ \times ١ - ١٢ \times ٢ - ٧|}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}}$

$= \frac{٢٦}{١٣} = ٢$ وحدة طول

(ب)



$س = \frac{٢ \times ٣ + ٢ \times -٣}{٣ + ٢} = -١$

$ص = \frac{٢ \times ٤ + ١ \times -١}{٣ + ٢} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

∴ النقطة (-١ ، ٢)

(٣) (أ) الميل = ظا ٤٥ = ١

متجه اتجاه المستقيم = (١ ، ١)

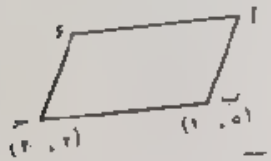
المعادلة الاتجاهية

$\overline{ر} = (٣ ، -٤) + ك(١ ، ١)$

المعادلة البارامترية هما

س = ٣ + ك ، ص = -٤ + ك

(ب)



$\overline{د} = \overline{أ} + \overline{جـ} - \overline{ب}$

$= (٣ ، ٤) + (٢ ، -٢) - (٥ ، -١)$

$= (٠ ، ٣)$

(٤) (أ) ل١ تصبح :

س = -١ + ٢ك ، ص = ٣ - ك

$\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص - ٣}{-١}$

∴ س + ١ = -٢ص + ٦

∴ المعادلة الإحداثية :

س + ٢ص - ٥ = ٠ ⟵ (١)

ويحلها مع المعادلة

٢س - ٣ص + ٤ = ٠ ⟵ (٢)

نجد س = ١ ، ص = ٢

∴ نقطة تقاطع المستقيم (١ ، ٢)

∴ ميل المستقيم المطلوب

$= \frac{٤ - ٢}{-٢ - ١} = \frac{٢}{-٣}$

معادلة المستقيم المطلوب

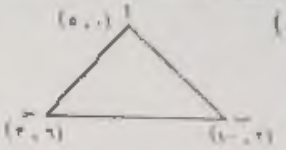
$(ص - ص_١) = م (س - س_١)$

$(ص - ٤) = -\frac{٢}{٣}(س + ٢)$

∴ ٣ص - ١٢ = -٢س - ٤

∴ المعادلة هي : $\boxed{٣ص + ٢س - ٨ = ٠}$

(ب)



$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٢ ، -٦)$

$|\overrightarrow{أب}| = \sqrt{٤ + ٣٦} = \sqrt{٤٠}$

$\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ}$

$\therefore \overrightarrow{أجـ} = (٣ ، ٦) - (٥ ، ٠)$

$= (-٢ ، ٦)$

$\therefore |\overrightarrow{أجـ}| = \sqrt{٤ + ٣٦} = \sqrt{٤٠}$

$\because \overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب}$

$= (٣ ، ٦) - (١ ، -٢)$

$= (٢ ، ٤)$

$\therefore |\overrightarrow{بجـ}| = \sqrt{٤ + ١٦} = \sqrt{٢٠}$

$\because$ أب = أجـ $\therefore$ Δ متساوي الساقين

$\because$ ب جـ أصغر من أب

$\therefore$ الزاوية حادة

$\because$ ميل $\overline{أب} = \frac{-٦}{٢} = \frac{-٣}{١} = م_١$

، ميل $\overline{أجـ} = \frac{-٢}{٦} = \frac{-١}{٣} = م_٢$

$\text{ظا } هـ = \left|\frac{\frac{١}{٣} + ٣-}{١ + \frac{١}{٣} \times \frac{٣-}{١}}\right| = \frac{\frac{٧}{٣}}{٢} = \frac{٧}{٦}$

$\therefore ق(\hat{هـ}) = ق(\hat{أ}) = ٤٩° ٢٤'$

(٨) امتحان منطقة المنوفية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) شرط التعامد $م_١ \times م_٢ = ١$

$\therefore \frac{٣}{٢} \times \frac{-١}{٣} = -١$ $\therefore$ $\boxed{أ = ٢}$

(ب) المستقيم $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{-٣} = ١$

أ = ٤ ، ب = -٣

المساحة = $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٣ = ٦$ وحدة طول

(جـ) $\because$ س = ١٢ جتا $(\frac{\pi}{٤})$ = ١٢

ص = ١٢ جا $\frac{\pi}{٤}$ = ١٢

$\therefore \overrightarrow{م} = ١٢ \overrightarrow{س} + ١٢ \overrightarrow{ص}$

(د) $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{م} - \overrightarrow{أ}$

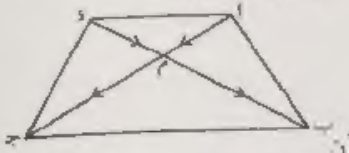
$= ١٢ \overrightarrow{ى} - ٨ \overrightarrow{ى} = ٢٠ \overrightarrow{ى}$

(٢) (أ) $\because \overrightarrow{بجـ} = ٣ \overrightarrow{أد}$

$\therefore \overrightarrow{بجـ} \parallel \overrightarrow{أد}$ ، ب جـ = ٣ أ د

$\therefore$ الشكل فيه ضلعان متوازيان وغير متساويين

$\therefore$ الشكل شبه المنحرف



بفرض أن

$\overline{أجـ} \cap \overline{بد} = \{م\}$

في Δ أ م د

$\because \overrightarrow{أم} + \overrightarrow{مد} = \overrightarrow{أد}$ ⟵ (١)

في Δ ب م جـ

$\overrightarrow{بم} + \overrightarrow{مجـ} = \overrightarrow{بجـ}$ ⟵ (٢)

بجمع (١) ، (٢)

$(\overrightarrow{أم} + \overrightarrow{مجـ}) + (\overrightarrow{مد} + \overrightarrow{بم})$

$= \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{بجـ}$ ⟵ (٣)

$\because \overrightarrow{بجـ} = ٣ \overrightarrow{أد}$

$\therefore$ (٣) تصبح $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بد} = ٤ \overrightarrow{أد}$

(ب) بفرض أن (ب) بين أ ، جـ

$\overrightarrow{م_١} = (٥ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{م_٢} = (-١ ، ٤)$

$\overrightarrow{م} = \overrightarrow{ب} = (١ ، ٢)$

$\because \overrightarrow{م} = \frac{ل_١ \overrightarrow{م_٢} + ل_٢ \overrightarrow{م_١}}{ل_١ + ل_٢}$

$\therefore (١ ، ٢) = \frac{ل_١ (٥ ، -٢) + ل_٢ (-١ ، ٤)}{ل_١ + ل_٢}$

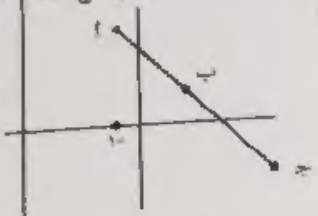
$\therefore ١ = \frac{٥ل_١ - ل_٢}{ل_١ + ل_٢}$

$\therefore ل_١ + ل_٢ = ٥ل_١ - ل_٢$ ، $٤ل_٢ = ٢ل_١$

$٢ل_٢ = ل_١$ $\therefore \frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{١}{٢}$ ، $\therefore \frac{ل_١}{ل_٢} > ٠$

$\therefore$ التقسيم من الداخل بنسبة ١ : ٢

ملحوظة هامة : حتى يتحقق الطالب من حله يرسم المسألة



حيث :

أ = (-١ ، ٤) ، ب = (١ ، ٢) ،

جـ = (٥ ، -٢)

واضح أن ب تقع على بين أ ، جـ بنسبة ١ : ٢

(٣) (أ) $\because \overrightarrow{م} = (\frac{١}{٣} ، ٠) + ك(-٣ ، ٤)$

$\therefore$ س = -٣ك ، ص = $\frac{١}{٣} + ٤ك$

$\therefore \frac{س}{-٣} = \frac{(ص - \frac{١}{٣})}{٤}$

$\therefore$ ٤س = -٣ص + ١

$\therefore$ المعادلة ٤س + ٣ص - ١ = ٠

طول العمود = $\frac{|٤ \times ٨ + ٣ \times -٢ - ١|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

= $\frac{٢٥}{٥}$ = ٥ وحدات طول

(ب) المستقيم المعطى ص = $\frac{٣}{٢}$ س

$\therefore$ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{٣}{٢}$

$\therefore$ متجه اتجاه المستقيم (٢ ، ٣)

$\therefore$ الصورة الإتجاهية للمعادلة المطلوبة

$\overrightarrow{م} = (٧ ، ٤) + ك(٢ ، ٣)$

، المعادلتان البارامتريتان :

س = ٧ + ٢ك ، ص = ٤ + ٣ك

المعادلة الإحداثية :

$\frac{س - ٧}{٢} = \frac{ص - ٤}{٣}$

$\therefore$ ٣س - ٢١ = ٢ص - ٨

$\therefore$ المعادلة هي $\boxed{٣س - ٢ص - ١٣ = ٠}$

(٤) (أ) ميل المستقيم المار بالنقطتين

$م_١ = \frac{١ - -١}{٢ - ٤} = \frac{٢}{-٢} = -١$

ميل المستقيم الثاني = $م_٢ = \frac{١}{٢}$

$\therefore \text{ظا } هـ = \left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right| = \left|\frac{-١ - \frac{١}{٢}}{١ + -١ \times \frac{١}{٢}}\right|$

$= \frac{\frac{٣}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٣$

$\therefore ق(\hat{هـ}) = ٧١° ٣٤'$

(ب) $\frac{١}{٢} \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - ٣ \overrightarrow{جـ}$

$= \frac{١}{٢}(٤ ، -٦) + (-٦ ، ٩) - ٣(-٣ ، -٢)$

$= (٢ ، -٣) + (-٦ ، ٩) + (٩ ، -٦)$

$= (٥ ، ١٢)$

$\therefore |\frac{١}{٢} \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - ٣ \overrightarrow{جـ}|$

$= \sqrt{١٢٤ + ٢٥} = ١٣$

(٩) امتحان منطقة الغربية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

$= (٣ ، -١) - (٦ ، ٣)$

$\overrightarrow{أب} = (-٣ ، -٤)$

$\therefore |\overrightarrow{أب}| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$

(ب) قياس الزاوية هي ٩٠°

(جـ) $\because |\overrightarrow{ق}| = \sqrt{٦٤ + ٦٤} = ٨\sqrt{٢}$

، ظا θ = $\frac{ص}{س}$ = ١

$\therefore ق(\hat{θ}) = \text{ظا}^{-١}(١) = ٤٥°$

$\therefore θ = \frac{\pi}{٤}$ $\therefore \overrightarrow{ق} = (٨\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤})$

(٤) $\boxed{\text{ص} = -٤}$

(٢) (أ) في ∆ أ ب ء

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ء}} = \overrightarrow{\text{أ ء}}$ بالضرب × ٢

$٢\overrightarrow{\text{أب}} + ٢\overrightarrow{\text{ب ء}} = ٢\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ..... (١)

في ∆ أ ء جـ

$\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}} = \overrightarrow{\text{أ ء}}$ بالضرب × ٣

∴ $٣\overrightarrow{\text{أجـ}} + ٣\overrightarrow{\text{جـ ء}} = ٣\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ..... (٢)

بجمع (١)، (٢)

$٢\overrightarrow{\text{أب}} + ٣\overrightarrow{\text{أجـ}} + ٢\overrightarrow{\text{ب ء}} + ٣\overrightarrow{\text{جـ ء}} = ٥\overrightarrow{\text{أ ء}}$

..... (٣)

∵ $٢\overrightarrow{\text{ب ء}} = ٣\overrightarrow{\text{جـ ء}} = -٣\overrightarrow{\text{جـ ء}}$

∴ من (٣)

$٢\overrightarrow{\text{أب}} + ٣\overrightarrow{\text{أجـ}} - ٣\overrightarrow{\text{جـ ء}} + ٣\overrightarrow{\text{جـ ء}} = ٥\overrightarrow{\text{أ ء}}$

∴ $٢\overrightarrow{\text{أب}} + ٣\overrightarrow{\text{أجـ}} = ٥\overrightarrow{\text{أ ء}}$ (المطلوب)

(ب) $\text{م}_١ = \frac{-٣}{-٤} = \frac{٣}{٤}$

$\text{م}_٢ = \frac{-٦}{-٨} = \frac{٣}{٤}$

∵ $\text{م}_١ = \text{م}_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان.

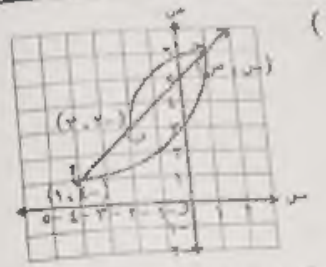
بفرض نقطة على المستقيم الأول وليكن ص = ٠

∴ النقطة (٢، ٠) تقع على المستقيم الأول

البعد = $\frac{|٨ \times ٠ - ٦ \times ٢ - ١٣|}{\sqrt{٦٤ + ٣٦}}$

= $\frac{٢٥}{١٠}$ = ٢,٥ وحدة طول

(٣) (أ)



∵ $\text{ل}_١ : \text{ل}_٢ = ٥ : -٣$

$\text{ر} = \frac{\text{ل}_١ \overrightarrow{\text{ر}_٢} + \text{ل}_٢ \overrightarrow{\text{ر}_١}}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$

$= \frac{٥(-٢ ، ٣) - ٣(-٤ ، ١)}{٥ - ٣}$

$= \frac{(١٢ ، ٢)}{٢} = (٦ ، ١)$

(ب) المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين هي :

س − ص + ٢ + ك(٢س + ص − ٨) = ٠

ويمر بالنقطة (٣ ، ٤) ∴ يحقق المعادلة

∴ ٣ − ٤ + ٢ + ك(٢ × ٣ + ٤ − ٨) = ٠

١ + ٢ك = ٠ ∴ $\text{ك} = -\frac{١}{٢}$

∴ المعادلة هي : س − ص + ٢ + $(-\frac{١}{٢})$

(٢س + ص − ٨) = ٠ بالضرب ×٢

∴ ٢س − ٢ص + ٤ − ٢س − ص + ٨ = ٠

∴ −٣ص + ١٢ = ٠ ∴ $\boxed{\text{ص} = ٤}$

(١٠) امتحان منطقة البحيرة ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) $\text{م}_١ = \frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢}$ ، $\text{م}_٢ = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$

∵ المستقيمان متعامدان

$\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = -١$

∴ $\frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٣} = -١$ ∴ $\boxed{\text{أ} = -٢}$

(ب) $\overrightarrow{\text{ق}} = ٢٠$ حتا ٣٠° $\overrightarrow{\text{س}}$

− ٢٠ حا ٣٠ $\overrightarrow{\text{ص}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ق}} = ١٠\sqrt{٣}\,\overrightarrow{\text{س}} - ١٠\,\overrightarrow{\text{ص}}$

(جـ) $\|-٤\,\overrightarrow{\text{أ}}\|$

$= ٢\|\text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}}\|$

∴ ٤ = ٢|ك| ∴ ك = ±٢

(٥) بفرض أن محور السينات يقطع $\overline{\text{أب}}$ في نقطة (هـ) = (س ، ٠)

∴ $\text{ص} = \frac{\text{ل}_١\text{ص}_٢ + \text{ل}_٢\text{ص}_١}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$

صفر = $\frac{\text{ل}_١ \times -٨ + \text{ل}_٢ \times ٤}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$

−٨ل₁ + ٤ل₂ = ٠ ∴ ٢ل₁ = ل₂

∴ $\frac{\text{ل}_١}{\text{ل}_٢} = \frac{١}{٢} > ٠$

∴ التقسيم من الداخل بنسبة ١ : ٢

إحداثي نقطة س = $\frac{١ \times ٦ + ٢ \times -٣}{١ + ٢}$

= صفر

∴ النقطة هي (٠ ، ٠) نقطة الأصل

فإن محور السينات يقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

(٢) (أ) ميل المستقيم الأول = $\text{م}_١$

= $\frac{-٢}{١}$ = −٢

ميل المستقيم الثاني = $\text{م}_٢ = \frac{-٢}{١}$ = −٢

∵ $\text{م}_١ = \text{م}_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان

∵ (٠ ، ٤) تقع على المستقيم الأول

∴ البعد = $\frac{|٢ + ٤ + ٠ \times ٢|}{\sqrt{٤ + ١}}$

$\frac{٦}{\sqrt{٥}}$

(ب) سبق البرهنة في المنوفية رقم (٢) (أ)

(٣) (أ) ميل الأول = $\text{م}_١ = \frac{-١}{-\text{ك}} = \frac{١}{\text{ك}}$

$\text{م}_٢ = \frac{-٢}{-١} = ٢$

∵ طا $\frac{\pi}{٤} = \left|\frac{\text{م}_١ - \text{م}_٢}{١ + \text{م}_١\text{م}_٢}\right|$

$١ = \left|\frac{\frac{١}{\text{ك}} - ٢}{١ + \frac{١}{\text{ك}} \times ٢}\right|$ ، $١ = \frac{\frac{١}{\text{ك}} - ٢}{\frac{٢}{\text{ك}} + ١}$

الحالة الأولى : $\frac{١}{\text{ك}} - ٢ = \frac{٢}{\text{ك}} + ١$

$-\frac{١}{\text{ك}} = ٣$ ∴ $\boxed{\text{ك} = -\frac{١}{٣}}$

الحالة الثانية : $-١ = \frac{\frac{١}{\text{ك}} - ٢}{\frac{٢}{\text{ك}} + ١}$

$-١ - \frac{١}{\text{ك}} = \frac{٢}{\text{ك}} - ٢$

$\frac{٣}{\text{ك}} = ١$ ∴ $\boxed{\text{ك} = ٣}$

(ب) ميل المستقيم = طا ٤٥ = ١

∴ منحنى اتجاه المستقيم = (١ ، ١)

∴ المعادلة الاتجاهية

$\overrightarrow{\text{ر}} = (٣ ، -٤) + \text{ك}(١ ، ١)$

المعادلتان البارامتريتان

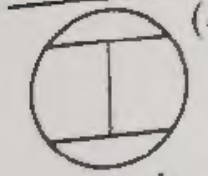
س = ٣ + ك ، ص = −٤ + ك

∴ المعادلة الإحداثية :

ك = س − ٣ = ص + ٤

∴ $\boxed{\text{س} - \text{ص} - ٧ = ٠}$

(٤) (أ) البعد بين (٠ ، ٠) والوتر الأول



∴ البعد

= $\frac{|٣ \times ٠ + ٤ \times ٠ + ١٠|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$ = $\frac{١٠}{٥}$ = ٢

والبعد بين (٠ ، ٠) والوتر الثاني

البعد = $\frac{|٥ \times ٠ - ١٢ \times ٠ + ٢٦|}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}}$ = $\frac{٢٦}{١٣}$ = ٢

∵ البعد بينهما متساوي

∴ الوتران متساويان

(ب) نقطة تقاطع المستقيمين

٢س + ص = ٥ ..... (١)

س + ٥ص = ١٦ ..... (٢)

بحلهما ∴ س = ١ ، ص = ٣

∴ النقطة (١ ، ٣) نقطة التقاطع وميل المستقيم المعلوم = $\frac{-١}{١}$ = ١

∴ ميل المستقيم العمودي على المستقيم المعلوم = −١

∴ معادلة المستقيم المطلوب

(ص − ٣) = −١(س − ١)

ص − ٣ + س − ١ = ٠

∴ $\boxed{\text{ص + س − ٤ = ٠}}$

(١١) امتحان منطقة سيوط ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) $\overline{أ}$

= (٦ جتا $\frac{\pi}{٣}$) $\overline{س}$ + (٦ جا $\frac{\pi}{٣}$) $\overline{ص}$

= ٣ $\overline{س}$ + ٣√٣ $\overline{ص}$

(ب) الزاوية ٩٠° من الرسم

(جـ)

∵ $\overline{أب}$ + $\overline{ب جـ}$ = $\overline{أ جـ}$

∴ $\overline{أب}$ + $\overline{ب جـ}$ + $\overline{أ جـ}$ = $\overline{أ جـ}$ + $\overline{أ جـ}$

∴ $\overline{أب}$ + $\overline{ب جـ}$ + $\overline{أ جـ}$ = ٢ $\overline{أ جـ}$

(٥) نقطة تلاقي المتوسطات

= ($\frac{٢ + ١ + ٦}{٣}$ ، $\frac{١ + ٥ - ٣}{٣}$)

= (٣ ، ١)

(أ) المعادلة الإتجاهية

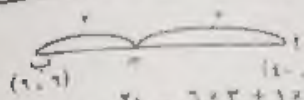
$\overline{ر}$ = (−٢ ، −٥) + ك(٣ ، ١)

المعادلة الإحداثية : $\frac{ص + ٥}{س + ٢}$ = $\frac{١}{٣}$

ص + ١٥ = س + ٢

$\boxed{\text{٣ص − س + ١٣ = ٠}}$

(ب)



س = $\frac{٢ \times ٣ + ١ \times ٢}{٣ + ٢}$ = $\frac{٢٠}{٥}$ = ٤

ص = $\frac{٢ \times ٣ + ٤ - \times ٢}{٣ + ٢}$ = $\frac{١٠}{٥}$ = ٢

∴ جـ = (٤ ، ٢)

(٣) (أ) تحويل المعادلة الاتجاهية إلى الإحداثية

∴ ص − ٢ = $\frac{-٣}{٤}$(س + ١)

∴ ٤ص − ٨ = −٣س − ٣

∴ ٤ص + ٣س − ٥ = ٠

(ب) ‖$\overline{أ}$‖ = $\sqrt{١٦ + ٤٨}$ = ٨

∵ ظا θ = $\frac{٤\sqrt{٣}}{٤}$ = $\sqrt{٣}$

∴ ق(θ) = ٦٠° = $\frac{\pi}{٣}$

∴ $\overline{و أ}$ = (٨ ، $\frac{\pi}{٣}$)

(٤) (أ) نقطة التقاطع

٢س + ص = ٨ ..... (١)

س − ص = ١ ..... (٢)

من (١) ، (٢) س = ٣ ، ص = ٢

∴ النقطة (٣ ، ٢)

∴ معادلة التي توازي محور الصادات

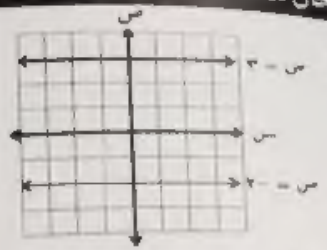
هي $\boxed{\text{س = ٣}}$

(ب) ٤ك‖$\overline{أ}$‖ = ٣‖$\overline{أ}$‖

٤ك = ٣ ∴ $\boxed{\text{ك = } \frac{٣}{٤}}$

(١٢) امتحان منطقة القاهرة ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

(١) (أ)



البُعد بين المستقيمين = ٥ وحدات

(ب) ميل الأول = ميل الثاني

∴ $\frac{-١}{٣}$ = $\frac{-٢}{-٣}$ ∴ أ = −٢

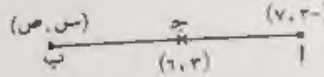
(جـ) نقطة تقاطع المستقيمين (٣ ، ٣)

ونقطة الأصل (٠ ، ٠)

∴ $\frac{ص - ٣}{س - ٣}$ = $\frac{٠ - ٣}{٠ - ٣}$ = ١

∴ ص − ٣ = س − ٣ ∴ ص = س

(٥)



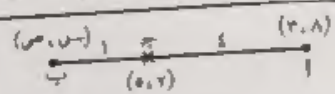
∴ $\frac{-٣ + س}{٢}$ = ٣ ∴ −٣ + س = ٦

∴ س = ٩ ، ∴ $\frac{٧ + ص}{٢}$ = ٦

∴ ٧ + ص = ١٢

∴ ص = ٥ ∴ ب = (٩ ، ٥)

(٢) (أ)



٢ = $\frac{١ \times ٨ + ٤س}{١ + ٤}$

∴ ١٠ = ٨ + ٤س ∴ ٤س = ٢

∴ س = $\frac{١}{٢}$

٥ = $\frac{١ \times ٣ + ٤ص}{١ + ٤}$

∴ ٢٥ = ٣ + ٤ص ∴ ٢٢ = ٤ص

∴ ص = $\frac{١١}{٢}$ ∴ ب = ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١١}{٢}$)

(ب) طول العمود = $\frac{|١ \times ١ + ١ \times ١|}{\sqrt{١ + ١}}$

= $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ وحدات طول

(٣) (أ) $م_١$ = $\frac{-٣}{٤}$ ، $م_٢$ = $\frac{١}{٧}$

∴ ظا θ = $\left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right|$ = $\left|\frac{\frac{-٣}{٤} - \frac{١}{٧}}{١ + \frac{-٣}{٤} \times \frac{١}{٧}}\right|$

= $\frac{\frac{١٧}{٢٨}}{\frac{٢١}{٢٨}}$ = $\frac{١٧}{٢١}$

∴ ق(θ) = ٢٣° ٤٤′ ٢٨″

(ب) المعادلة المتجهة للمستقيم :

$\overline{ر}$ = $\overline{و}$ + ك $\overline{ى}$

∴ المتجه (−١ ، ٢) عمودي عليه

، $\overline{ى}$ = (٢ ، ١)

∴ $\overline{ر}$ = (−٣ ، ٥) + ك(٢ ، ١)

∵ س = −٣ + ٢ك ص = ٥ + ك

∴ $\frac{س + ٣}{٢}$ = ك $\frac{ص - ٥}{١}$ = ك

∴ $\frac{س + ٣}{٢}$ = $\frac{ص - ٥}{١}$

∴ س + ٣ = ٢ص − ١٠

∴ س − ٢ص + ١٣ = ٠ المعادلة الكارتيزية

(٤) (أ) بالقسمة على ١٢

∴ $\frac{س}{٣}$ + $\frac{س}{٤}$ = ١

∴ طولا الجزئين المقطوعين من المحورين السيني والصادات هما ٤ ، ٣ على الترتيب .

(ب) ∵ أس + ب ص + جـ

+ ك(أس + ب ص + جـ) = ٠

∴ س + ٢ص − ٥ + ك(٣س − ٣ص + ٤) = ٠

(−٢ ، ٤) ∈ المستقيم

∴ −٢ + ٢ × ٤ − ٥

+ ك(٢ × −٢ − ٣ × ٤ + ٤) = ٠

$\therefore ١ + ك(-١٢) = ٠ \quad \therefore ك = \frac{١}{١٢}$

$\therefore$ س + ص − ٥ + $\frac{١}{١٢}$(٢س − ٣ص + ٤) = ٠

$\therefore$ ١٢س + ١٢ص − ٦٠ + ٢س − ٣ص + ٤ = ٠

$\therefore$ ١٤س + ٢١ص − ٥٦ = ٠ (÷ ٧)

$\therefore$ ٢س + ٣ص − ٨ = ٠

(٣) امتحان منطقة الغربية ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

(١) (أ) $م_١ = \frac{-١}{-٢}$ ، $م_٢ = \frac{-١}{٢}$

$\therefore$ ظا هـ = $\left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right| = \left|\frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}}{١ - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}}\right|$

$\therefore$ ظا هـ = ١ $\quad \therefore$ ق(هـ) = ٤٥°

(ب) $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

= (٤ ، −٥) − (١ ، −١)

= (٣ ، −٤)

$\therefore \|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$

(جـ) ٣ك = ١٢ $\quad \therefore$ ك = ٤

(د) ١٢$\sqrt{٢}$ جتا $\frac{\pi}{٤}$ = ١٢

، ١٢$\sqrt{٢}$ جا $\frac{\pi}{٤}$ = ١٢

$\therefore \overrightarrow{م} = ١٢\overrightarrow{س} + ١٢\overrightarrow{ص}$

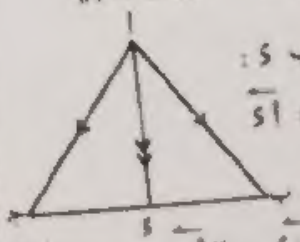
(٢) (أ) $\overline{أ} \parallel \overline{ب} \quad \therefore \frac{ص_٢}{س_٢} = \frac{ص_١}{س_١}$

$\therefore \frac{ك}{٦} = \frac{-١}{٣} \Leftarrow$ ٣ك = −٦ $\therefore$ ك = −٢

، $\overline{أ} \perp \overline{ب} \Leftarrow \frac{ص_٢}{س_٢} \times \frac{ص_١}{س_١} = -١$

$\therefore \frac{ك}{٦} \times \frac{-١}{٣} = -١ \quad \therefore$ ك = ١٨

(ب) في Δ أ ب ء :



$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب ء} = \overrightarrow{أ ء}$

(بالضرب × ٢)

$\therefore$ ٢$\overrightarrow{أب}$ + ٢$\overrightarrow{ب ء}$ = ٢$\overrightarrow{أ ء}$ ..... (١)

في Δ أ ء جـ :

$\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـ ء} = \overrightarrow{أ ء}$ (بالضرب × ٣)

$\therefore$ ٣$\overrightarrow{أجـ}$ + ٣$\overrightarrow{جـ ء}$ = ٣$\overrightarrow{أ ء}$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع :

٢$\overrightarrow{أب}$ + ٢$\overrightarrow{ب ء}$ + ٣$\overrightarrow{أجـ}$ + ٣$\overrightarrow{جـ ء}$ = ٥$\overrightarrow{أ ء}$

$\therefore$ ٢$\overrightarrow{ب ء}$ = ٣$\overrightarrow{جـ ء}$

$\therefore$ ٢$\overrightarrow{ب ء}$ − ٣$\overrightarrow{جـ ء}$ = $\overrightarrow{٠}$

$\therefore$ ٢$\overrightarrow{ب ء}$ + ٣$\overrightarrow{جـ ء}$ = ٢$\overrightarrow{ب ء}$ − ٣$\overrightarrow{جـ ء}$

= $\overrightarrow{٠}$

$\therefore$ ٢$\overrightarrow{أب}$ + ٣$\overrightarrow{أجـ}$ = ٥$\overrightarrow{أ ء}$

(٣) (أ) ميل المستقيم المعلوم = $\frac{٣}{٤}$

$\therefore$ معادلة المستقيم المطلوب :

$\frac{ص - ٥}{س - ٢} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore$ ٤ص − ٢٠ = ٣س − ٦

$\therefore$ ٤ص − ٣س − ١٤ = ٠

(ب) ميل المستقيم الأول = $\frac{٤}{٣}$

، ميل المستقيم الثاني = $\frac{-٤}{-٣} = \frac{٤}{٣}$

$\therefore$ الميلان متساويان

$\therefore$ المستقيمان متوازيان

نعتبر نقطة (٠ ، $\frac{٧}{٣}$) تقع على المستقيم الأول

بُعدها عن المستقيم :

٥س − ٣ص + ١٧ = ٠

$\therefore$ البعد = $\left|\frac{٤ \times ٠ - ٣ \times \frac{٧}{٣} + ١٧}{\sqrt{١٦ + ٩}}\right| = \frac{١٠}{٥} = ٢$